Università di Bari

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Il teorema di Brown per categorie triangolate

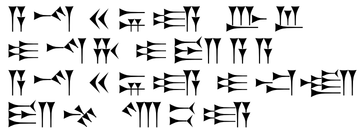
CANDIDATO: Nicola Di Vittorio

RELATORE: Prof.ssa Margherita Barile

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione



Gilgameš

Sin dalla sua compiuta disamina da parte di Aristotele, l'idea di *categoria* gioca un ruolo fondamentale nella storia del pensiero umano. Non fa meraviglia, dunque, che quando a metà degli anni '40 i matematici Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane proposero una teoria che formalizzasse le idee intuitive della topologia algebrica abbiano tratto ispirazione proprio da questo concetto per sviluppare un nuovo linguaggio.

Il formalismo della teoria delle categorie, originato dal pionieristico articolo *General Theory of Natural Equivalences* di Eilenberg e Mac Lane, ha poi conosciuto un enorme sviluppo grazie al lavoro di Alexander Grothendieck che ebbe la fenomenale intuizione di applicare questa teoria per rifondare la geometria algebrica, introducendo gli schemi e i topoi (questi ultimi troveranno significative applicazioni nella logica matematica), nonché il merito di definire le categorie abeliane e pensarle come il giusto ambiente al quale estendere l'algebra omologica.

Nel corso del tempo la teoria delle categorie è diventata a tutti gli effetti un'area della matematica, ampliandosi ed evolvendosi sempre più e conoscendo ulteriori generalizzazioni – come le n-categorie e le ∞-categorie – e sempre nuove applicazioni, dall'algebra universale alla fisica matematica all'informatica teorica, e oggigiorno costituisce una fiorente area di ricerca, spesso intrecciandosi con altre aree della matematica.

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* si situa per l'appunto a metà strada fra la teoria delle categorie e la topologia algebrica, per l'esattezza la teoria dell'omotopia. Nato infatti come teorema di natura topologica, è stato poi generalizzato a diversi contesti, che permettono un suo utilizzo anche nell'ambito della geometria algebrica. In questa sede tratteremo la sua versione per le categorie triangolate, definite per la prima volta proprio da uno studente di Grothendieck, Jean-Louis Verdier, dopo aver osservato le proprietà delle categorie derivate, da lui stesso precedentemente introdotte.

Le categorie triangolate, insieme a quelle abeliane, costituiscono il punto chiave della seguente trattazione: ci occuperemo infatti di una particolare tipologia di funtori, detti coomologici per enfatizzare la loro attinenza con le coomologie usuali, che si definiscono proprio tra una categoria triangolata e una abeliana (nel caso del teorema di Brown, quella dei gruppi abeliani). Se sono verificate alcune ipotesi, essi assumono una forma molto semplice, cioè sono rappresentabili. A tal proposito ricordiamo la

Definizione. Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola. Diciamo che un funtore $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ è *rappresentabile* se esiste un oggetto X di $\mathbf{C}$ e un isomorfismo naturale $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \to F$.

La rappresentabilità (che si definisce in maniera simile anche per i funtori covarianti) è una proprietà cruciale perché permette di studiare i funtori e le trasformazioni naturali tra di essi analizzando gli oggetti rappresentanti e i loro morfismi, che spesso sono più facili da trattare.

Questa tesi *est omnis divisa in partes tres*. Il primo capitolo servirà a presentare le nozioni fondamentali e a dare alcuni risultati preliminari: infatti definiremo le categorie additive, struttura basilare arricchendo la quale si potranno introdurre le categorie abeliane e le categorie triangolate e passeremo poi a definire i funtori coomologici.
Nel secondo capitolo vedremo ulteriori costruzioni, iniziando da quella di *colimite omotopico* che servirà a costruire effettivamente l'oggetto che rappresenta il funtore coomologico, per poi definire particolari famiglie di oggetti della nostra categoria triangolata la cui esistenza sarà una premessa indispensabile nella formulazione e quindi nella dimostrazione del teorema. Si noti che, per essere coerenti con la definizione di funtore rappresentabile data qui sopra, la rappresentabilità del funtore coomologico si deve intendere pensando $\mathbf{Ab}$ come categoria concreta, cioè sottocategoria di $\mathbf{Set}$.
Nel terzo e ultimo capitolo ci discosteremo leggermente dai primi due, ritornando da dove tutto è cominciato e riprendendo lo spirito topologico della formulazione originaria del teorema di Brown: inizieremo ricordando, senza svilupparle in dettaglio, alcune idee fondamentali della topologia algebrica per poi definire il funtore di coomologia singolare e vedere che in questo caso particolare lo spazio rappresentante è piuttosto semplice ma al contempo di indubbio valore teorico.
Sebbene queste due versioni siano apparentemente diverse, è interessante notare che i metodi dimostrativi usati per provare il teorema di Brown nelle sue molteplici forme si assomigliano molto e in effetti, come la ricerca contemporanea ha reso evidente, questa analogia è fondata sul fatto che tutte le categorie triangolate di uso comune siano categorie dell'omotopia di un certo tipo di ∞-categorie, alle quali si può generalizzare ulteriormente il teorema di rappresentabilità.

Nella seguente trattazione cercheremo di definire di volta in volta i concetti di cui ci serviremo, ma nonostante ciò saremo necessariamente costretti a considerare come prerequisiti molti risultati e idee basilari di teoria delle categorie, ad esempio faremo spesso uso del lemma (e dell'embedding) di Yoneda. La teoria necessaria si trova sviluppata nei primi capitoli del celebre libro di Mac Lane [ML71]. Daremo per noto anche qualche lemma fondamentale di algebra omologica, come ad esempio il lemma dei cinque. Tuttavia la conoscenza dell'algebra omologica non è indispensabile per la comprensione del testo, anche se può essere utile per gli esempi e come contestualizzazione.

In tutto il corso della tesi useremo alcune convenzioni ed alcuni simboli per snellire l'elaborato, sia graficamente che concettualmente. Nella fattispecie le categorie considerate saranno sempre da intendersi piccole (sia $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ che $\mathrm{Hom}(\mathbf{C})$ sono insiemi e non classi proprie) o localmente piccole (per ogni coppia di oggetti A e B in $\mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ è un insieme) e similmente lo saranno i (co)limiti, i.e. saranno indicizzati da categorie piccole. Scriveremo $X \in \mathbf{C}$ invece di $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ per non appesantire la notazione. La categoria dei funtori fra due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ sarà indicata con $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ o con $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ oppure con $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. La categoria dei prefasci d'insiemi verrà denotata $\widehat{\mathbf{C}}$ e infine si useranno le notazioni $h_A = \mathrm{Hom}(-, A)$ e $h^A = \mathrm{Hom}(A, -)$.

Capitolo 1

Categorie triangolate

1.1 Categorie additive e categorie abeliane

Definizione 1.1. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathbf{C}$ tale che per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ è munito di una struttura di gruppo abeliano e la composizione di morfismi è bilineare.

Un'importante proprietà delle categorie preadditive è la seguente

Proposizione 1.2. Sia $\mathbf{C}$ una categoria preadditiva e siano $X, Y \in \mathbf{C}$. Se $X \times Y$ esiste in $\mathbf{C}$ allora esiste anche $X \sqcup Y$ e questi sono isomorfi.

Dimostrazione. cfr. corollario 8.2.4. in [KS06] □

Motivati da questo risultato, i biprodotti (chiamati anche *somme dirette*) si indicheranno generalmente con $X \oplus Y$.

Osservazione 1.3. Sia **Grp** la categoria avente come oggetti i gruppi e come morfismi gli omomorfismi di gruppi. La proposizione precedente rende evidente che **Grp** non può essere una categoria preadditiva. Infatti, ricordando che il prodotto fra due gruppi è il prodotto diretto e il coprodotto è il prodotto libero, è immediato verificare che esistono gruppi per cui il prodotto e il coprodotto sono molto diversi. Pensiamo per esempio a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$: quest'ultimo è addirittura infinito!

Definizione 1.4. Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie preadditive.
Un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ si dice *additivo* se per ogni $A, B \in \mathbf{C}$ la funzione $f : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$ è un omomorfismo di gruppi.

Definizione 1.5. Una categoria preadditiva si dice *additiva* se ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un biprodotto.

Definizione 1.6. Sia $\mathbf{C}$ una categoria additiva e $f : X \to Y$ un morfismo in $\mathbf{C}$. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed] \\
 & Q &
\end{tikzcd}
$$

È consuetudine chiamare kernel sia l'oggetto precedentemente definito che il morfismo $\ker f \to X$, dunque in seguito confonderemo i due concetti, essendo chiaro dal contesto a cosa ci riferiamo. Ciò conduce ad un leggero abuso di notazione: difatti quando diciamo che due morfismi sono isomorfi intendiamo che lo sono i loro domini o codomini o il dominio dell'uno col codominio dell'altro e inoltre il quadrato ottenuto componendo gli isomorfismi e i morfismi dati è commutativo.

Definizione 1.7. Una categoria additiva è chiamata *preabeliana* se ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel.

Definizione 1.8. Una categoria preabeliana è detta *abeliana* se ogni monomorfismo è il kernel di un qualche morfismo e ogni epimorfismo è il cokernel di un qualche morfismo

Proposizione 1.9. Si hanno le seguenti proprietà:

1. In ogni categoria additiva, i kernel sono monomorfismi e i cokernel sono epimorfismi.

2. Sia $\varphi : A \to B$ un morfismo in una categoria additiva. Se φ ha un kernel, allora φ è un monomorfismo se e solo se $\ker\varphi \cong 0$. Se φ ha un cokernel, allora φ è un epimorfismo se e solo se $\operatorname{coker}\varphi \cong 0$

3. Ogni categoria abeliana è bilanciata, ovvero ogni morfismo che è contemporaneamente un monomorfismo e un epimorfismo è un isomorfismo.

4. In ogni categoria abeliana, dati un epimorfismo e ed un monomorfismo m, risulta che $e = \operatorname{coker}(\ker(e))$ e $m = \ker(\operatorname{coker}(m))$.

Dimostrazione. Per i primi tre punti si veda cap. IX lemmi 1.4, 1.5 e 1.9 di [Al09]. Dimostriamo il quarto punto. Sia $e : Y \to Z$ un epimorfismo, per definizione di categoria abeliana $\exists f : X \to Y$ t.c. $e = \operatorname{coker} f$. Inoltre esiste un morfismo $k = \ker(e)$. Combinando i diagrammi di kernel e cokernel si ottiene il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed, "g'"] \\
\ker(e) \arrow[r, "0"] \arrow[ur, "k"] & Q &
\end{tikzcd}
$$

in cui sono presenti anche i morfismi zero $X \xrightarrow{0} Q$ e $\ker(e) \xrightarrow{0} \mathrm{coker} f$. Se g è tale che $g \circ k = 0$ (che esiste perché nelle categorie additive per ogni coppia di oggetti c'è un morfismo zero) allora $g \circ k \circ f' = g \circ f = 0$ e quindi[1] $g = g' \circ e$, cioè $e = \mathrm{coker} k = \mathrm{coker}(\ker(e))$. Dualmente, ciascun monomorfismo è kernel del proprio cokernel. □

Definizione 1.10. Sia f un morfismo di una categoria abeliana, si definiscono $\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker} f)$ e $\mathrm{coim} f = \mathrm{coker}(\ker f)$, dette rispettivamente *immagine* e *coimmagine* di f.

Questa definizione permette un'ulteriore caratterizzazione delle categorie abeliane. Vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 1.11. Una categoria preabeliana $\mathbf{C}$ è abeliana se e solo se il morfismo[2] canonico $\mathrm{coim} f \dashrightarrow \mathrm{im} f$ è un isomorfismo per ogni $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C})$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia $f : A \to B$ un monomorfismo, allora il suo kernel è zero e dunque la coimmagine è l'identità (di A). Poiché immagine e coimmagine sono isomorfe allora la mappa dal dominio alla coimmagine rende il dominio un kernel. Dualmente si vede che ogni epi è un cokernel.
($\Rightarrow$) cfr. cap. IX teorema 1.13 di [Al09]. □

Osservazione 1.12. Si può vedere che:

(i) se I è un insieme e $\{\mathbf{C}_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di categorie abeliane, allora la categoria prodotto $\prod_{i \in I} \mathbf{C}_i$ è abeliana.

(ii) se $\mathbf{B}$ è una categoria piccola e $\mathbf{C}$ è una categoria abeliana, la categoria $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ dei funtori da $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ è abeliana. Per esempio, se $F, G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ sono due funtori e $\varphi : F \to G$ è un morfismo (una trasformazione naturale), si definisce il funtore $X \mapsto N(X) = \ker(F(X) \longrightarrow G(X))$. Chiaramente, N è il kernel di φ.

(iii) se $\mathbf{C}$ è abeliana, allora la categoria opposta $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ è abeliana. Si noti che per ogni $f : X \to Y$ in $\mathbf{C}$, risulta $\ker(f^{\mathrm{op}}) \cong (\mathrm{coker}(f))^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{coker}(f^{\mathrm{op}}) \cong (\ker(f))^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{im}(f^{\mathrm{op}}) \cong (\mathrm{coim}(f))^{\mathrm{op}}$ e $\mathrm{coim}(f^{\mathrm{op}}) \cong (\mathrm{im}(f))^{\mathrm{op}}$.

Esempio 1.13. La categoria dei moduli liberi è additiva ma non preabeliana, infatti dalla teoria della forma normale di Smith sappiamo che, in generale, il coker di un omomorfismo di moduli liberi non è un modulo libero.

Esempio 1.14. La categoria **Ban** degli spazi di Banach complessi possiede tutti i kernel e i cokernel. Se $f : X \to Y$ è un morfismo di spazi di Banach, allora si verifica facilmente che $\ker f = f^{-1}(0)$ e $\mathrm{coker} f = Y/\overline{\mathrm{im} f}$. Ciononostante **Ban** non è abeliana, infatti esistono applicazioni lineari continue

[1] Questa fattorizzazione è unica perché $g' \circ e = g = g'' \circ e \Rightarrow g' = g''$ poiché e è epi.

[2] L'esistenza e unicità di questo morfismo nelle categorie preabeliane discende dalle proprietà universali di kernel e cokernel.

f che sono iniettive e hanno immagine densa e non chiusa. Per una f del genere, $\mathrm{ker} f = \mathrm{coker} f = 0$, $\mathrm{coim} f \cong X$ e $\mathrm{im} f \cong Y$, ma $\mathrm{coim} f \dashrightarrow \mathrm{im} f$ non è un isomorfismo.

Esempio 1.15. Abbiamo visto che **Grp** non è una categoria preadditiva. Se ci restringiamo però alla sua sottocategoria piena **Ab** otteniamo l'esempio principe di categoria abeliana: gli hom-sets sono resi gruppi abeliani definendo puntualmente la somma di morfismi, il gruppo banale $\{0\}$ è l'oggetto zero, i biprodotti sono i prodotti diretti finiti di gruppi (che coincidono con le somme dirette), kernel e cokernel sono definiti nella maniera usuale e infine l'isomorfismo fra immagine e coimmagine non è altro che il teorema fondamentale d'omomorfismo[3]. Questo esempio si generalizza alla categoria R-**Mod** dei moduli su un anello R.

L'importanza delle categorie abeliane risiede soprattutto nel fatto che esse costituiscono il setting più generale per l'algebra omologica: in questo contesto è infatti possibile definire le successioni esatte.

Definizione 1.16. Sia **C** una categoria abeliana. Una successione di morfismi $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ è detta *esatta* (in X) se:

1. $g \circ f = 0$ (condizione di *complesso*)[4]
2. $\mathrm{im} f \cong \mathrm{ker} g$ (condizione di *esattezza*)

A questo punto si possono ricavare tutti i principali risultati dell'algebra omologica (a partire dai classici snake lemma e five lemma) con argomenti di natura categoriale, ovvero ragionando sulle frecce piuttosto che sui singoli oggetti. Tuttavia, più concretamente, ogniqualvolta si ha a che fare con categorie abeliane è utile pensare di lavorare con categorie di moduli, che sono generalmente più facili da trattare. Questo atteggiamento è giustificato dal seguente teorema (che non dimostriamo).

Teorema 1.17. (*Freyd-Mitchell's embedding theorem*) Sia **A** una categoria abeliana piccola. Allora esiste un anello R e un funtore pienamente fedele ed esatto $\mathbf{A} \to R$-**Mod**.

Questo funtore dà luogo ad un'equivalenza di categorie fra **A** e una sottocategoria piena di R-**Mod**.

1.2 Categorie triangolate

Prima di passare alle categorie triangolate è necessario introdurre alcuni concetti preliminari. Diamo quindi le seguenti definizioni.

[3]Facile verificare che $\mathrm{coim} f = X/\mathrm{ker} f$ per ogni morfismo f avente come dominio X

[4]In realtà i complessi si possono definire in categorie additive. L'abelianità della categoria serve per il punto 2.

Definizione 1.18. Una categoria con traslazione $(\mathbf{D}, T)$ è il dato di una categoria $\mathbf{D}$ e di un'auto-equivalenza $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$. Il funtore T è chiamato *funtore di traslazione* (o anche *funtore di shift* oppure *sospensione* e in tal caso viene spesso indicato con Σ).

Definizione 1.19. Un funtore tra categorie con traslazione $F : (\mathbf{D}, T) \to (\mathbf{D}', T')$ è un funtore $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ che commuta con lo shift, ovvero per cui vale l'isomorfismo $F \circ T \cong T' \circ F$.

Se $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}'$ sono categorie additive e F è additivo allora diremo che F è un funtore di categorie additive con traslazione.

Definizione 1.20. Sia $(\mathbf{D}, T)$ una categoria additiva con traslazione.

1. Un *triangolo* in $\mathbf{D}$ è una successione di morfismi

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

2. Un morfismo di triangoli è un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Fatte queste premesse possiamo enunciare la seguente

Definizione 1.21. Una *categoria triangolata* è una categoria additiva con traslazione $(\mathbf{D}, T)$ munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità), che soddisfa gli assiomi seguenti:

TR0 Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

TR1 Il triangolo $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ è un d.t.

TR2 Per ogni $f : X \longrightarrow Y$ esiste un d.t. $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$.

TR3 Se un triangolo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ è distinto allora $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ e $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$ sono distinti

TR4 Dati due d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$ e due morfismi $\alpha : X \to X'$ e $\beta : Y \to Y'$ con $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, esiste un morfismo $\gamma : Z \to Z'$ che dà luogo ad un morfismo di d.t.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX' \end{tikzcd}$$

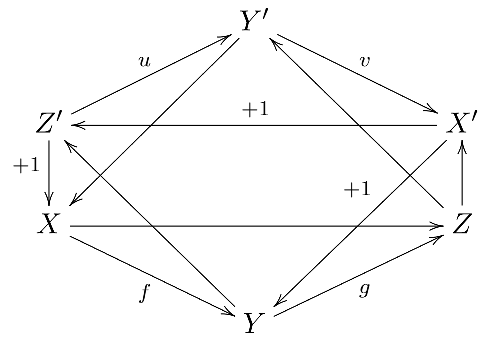
TR5 Dati tre d.t.

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX, \\ Y &\xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY, \\ X &\xrightarrow{g\circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX, \end{aligned}$$

esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & TZ'
\end{tikzcd}$$

Il precedente diagramma è spesso chiamato *diagramma ottaedrale*. Infatti può essere scritto usando i vertici di un ottaedro



dove, per esempio, per $X' \xrightarrow{+1} Y$ si intende un morfismo $X' \to TY$.
Una categoria additiva con traslazione si dice *pretriangolata* se valgono tutti gli assiomi tranne l'ultimo.

Osservazione 1.22. Si verifica facilmente che se $(\mathbf{D}, T)$ è una categoria triangolata allora $(\mathbf{D}^{\text{op}}, T^{\text{op}})$ è una categoria triangolata, avendo indicato $T^{\text{op}} = \text{op} \circ T^{-1} \circ \text{op}^{-1}$.

Per semplicità di notazione d'ora in avanti indicheremo le categorie triangolate con $\mathbf{T}$, sottintendendo il funtore di shift.

Definizione 1.23. Un *funtore triangolato* $F : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e preserva i d.t.

Nel caso in cui tale funtore sia un'inclusione di categorie si dice che $\mathbf{T}$ è una *sottocategoria triangolata* di $\mathbf{T}'$.

Esempio 1.24. Molte categorie di uso comune in algebra omologica e in topologia algebrica sono triangolate. In effetti non mancano esempi di categorie dell'omotopia che ammettono struttura di categoria triangolata: è il caso della categoria dell'omotopia dei complessi di catene (per una dimostrazione di questo fatto si veda [GM96] cap.IV teorema 9).

Proposizione 1.25. Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to TX$ è un d.t. allora $g \circ f = 0$

Dimostrazione. Applicando **TR1** e **TR4** si ottiene un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TX \arrow[d, "id"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

Quindi $g \circ f = 0$ perché fattorizza attraverso lo 0. □

1.3 Funtori coomologici

Definizione 1.26. Siano $\mathbf{T}$ una categoria triangolata e $\mathbf{A}$ una categoria abeliana. Un funtore additivo $F : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ si dice *coomologico* se per ogni d.t.

$$X \to Y \to Z \to TX$$

in $\mathbf{T}$, la successione di morfismi di $\mathbf{A}$

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z)$$

è esatta[5].

Proposizione 1.27. Per ogni $A \in \mathbf{T}$, i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(A, -)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, A)$ sono coomologici.

Dimostrazione. Siano $X \to Y \to Z \to TX$ un d.t. e $A \in \mathbf{T}$. Vogliamo far vedere che

$$\mathrm{Hom}(A, X) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}(A, Y) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}(A, Z)$$

è esatta, ovvero $\forall \varphi : A \to Y$ t.c. $g \circ \varphi = 0$ $\exists \psi : A \to X$ t.c. $\varphi = f \circ \psi$ ma questo segue dagli assiomi **TR3** e **TR4** per il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TA \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

Per dualità si dimostra la coomologicità di $\mathrm{Hom}(-, A)$. □

[5] Alcuni autori definiscono i funtori coomologici su $\mathbf{T}^{\mathrm{op}}$ e chiamano questi omologici.

Osservazione 1.28. In virtù dell'assioma **TR3** un funtore coomologico induce una successione esatta lunga

$$\cdots \to F(T^{-1}Z) \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to F(TX) \to \cdots$$

Proposizione 1.29. Consideriamo un morfismo di d.t.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Se α e β sono isomorfismi, lo è anche γ.

Dimostrazione. La dimostrazione è diretta conseguenza della proposizione precedente: infatti applicando il funtore h^A al diagramma di sopra otteniamo un altro diagramma

$$\begin{tikzcd} h^A(X) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & h^A(Y) \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\widetilde{\beta}"'] & h^A(Z) \arrow[r, "\widetilde{h}"] \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"'] & h^A(TX) \arrow[r, "\widetilde{T(f)}"] \arrow[d, "\widetilde{T(\alpha)}"'] & h^A(TY) \arrow[d, "\widetilde{T(\beta)}"'] \\ h^A(X') \arrow[r, "\widetilde{f'}"] & h^A(Y') \arrow[r, "\widetilde{g'}"] & h^A(Z') \arrow[r, "\widetilde{h'}"] & h^A(TX') \arrow[r, "\widetilde{T(f')}"] & h^A(TY') \end{tikzcd}$$

(dove $\widetilde{\alpha} \overset{\text{def}}{=} h^A(\alpha)$ etc.) le cui righe sono esatte e in cui $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{T(\alpha)}, \widetilde{T(\beta)}$ sono isomorfismi. Ma allora, per il lemma dei 5, anche $\widetilde{\gamma}$ è un isomorfismo. Usando l'embedding di Yoneda si deduce perciò che γ è un isomorfismo. □

Corollario 1.30. Sia $\mathbf{T}'$ una sottocategoria triangolata piena di $\mathbf{T}$. Se $X \to Y \to Z \to TX$ è un d.t. in $\mathbf{T}$ e $X, Y \in \mathbf{T}'$ allora Z è isomorfo ad un oggetto di $\mathbf{T}'$.

Dimostrazione. Per l'assioma **TR2** esiste un d.t. $X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to TX$ in $\mathbf{T}'$ allora per **TR4** esiste un isomorfismo tra $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to TX$ e $X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to TX$ in $\mathbf{T}$. Per la proposizione precedente si ha dunque $Z \cong Z'$. □

D'ora in poi supponiamo che le categorie triangolate ammettano somme dirette infinite, nel qual caso ci riferiamo specificamente ai coprodotti: infatti l'additività delle categorie triangolate garantisce soltanto che i prodotti e i coprodotti *finiti* coincidano, mentre nel caso infinito potrebbero essere diversi (si pensi ad esempio al caso dei moduli).

Proposizione 1.31. Lo shift di una categoria triangolata commuta con le somme dirette.

Dimostrazione. Per definizione lo shift è un'autoequivalenza di categorie. Ma allora, per il Teorema IV.4.1 di [ML71], ha sia aggiunto sinistro che aggiunto destro e quindi commuta sia con i prodotti che con i coprodotti. □

Proposizione 1.32. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata e I un insieme. Si ha che la somma diretta di triangoli distinti è ancora un triangolo distinto.

Dimostrazione. Sia $D_i : X_i \to Y_i \to Z_i \to TX_i$ una famiglia di triangoli distinti indicizzata da I.
Sia D il triangolo $\bigoplus_{i\in I} D_i : \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} Y_i \to \bigoplus_{i\in I} Z_i \to \bigoplus_{i\in I} TX_i$
Per **TR2** esiste un d.t. $D' : \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} Y_i \to Z \to T(\bigoplus_{i\in I} X_i)$
Per **TR4** esistono morfismi di triangoli distinti $D_i \to D'$

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \arrow[r] \arrow[d] & TX_i \arrow[d] \\
\bigoplus\limits_{i\in I} X_i \arrow[r] & \bigoplus\limits_{i\in I} Y_i \arrow[r] & Z \arrow[r] & T\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i\Big)
\end{tikzcd}$$

dove le prime due frecce sono iniezioni canoniche, l'ultima è l'immagine della prima mediante il funtore T e la penultima esiste in virtù dell'assioma citato. Questi morfismi inducono un morfismo $D \to D'$. Sia $A \in \mathbf{T}$ e mostriamo che $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(D', A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(D, A)$: questo implicherebbe l'isomorfismo $D \cong D'$ per l'embedding di Yoneda che a sua volta implicherebbe la tesi per l'assioma **TR0**. Consideriamo perciò il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\Big(T\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i\Big), A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} TY_i, A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(TY_i, A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}\Big(T\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i\Big), A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} TX_i, A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(TX_i, A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(Z, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} Z_i, A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(Z_i, A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i, A\Big) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i, A\Big) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(Y_i, A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i, A\Big) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i, A\Big) \arrow[r, "\cong"] & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, A)
\end{tikzcd}$$

dove la prima colonna è esatta perché D' è un d.t. e $\mathrm{Hom}(-, A)$ è coomologico, la seconda colonna è isomorfa alla terza perché l'hom-funtore controvariante manda coprodotti in prodotti e la terza colonna è esatta perché ogni componente del prodotto è una successione esatta (poiché i D_i sono d.t.) e il prodotto di successioni esatte è una successione esatta. Inoltre tutte le frecce orizzontali eccetto quella centrale sono isomorfismi e dunque, per il lemma dei 5, lo è anche quella centrale. Ciò conclude la dimostrazione. $\square$

Come caso particolare di questa proposizione otteniamo il seguente

Corollario 1.33. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata.

1. Se $X_1 \to Y_1 \to Z_1 \to TX_1$ e $X_2 \to Y_2 \to Z_2 \to TX_2$ sono due d.t. allora $X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 \to Z_1 \oplus Z_2 \to TX_1 \oplus TX_2$ è un d.t.

2. Siano $X, Y \in \mathbf{T}$. Allora $X \to X \oplus Y \to Y \xrightarrow{0} TX$ è un d.t.

Le categorie triangolate sono un altro importante esempio di categorie additive che non sono abeliane. Infatti vale la seguente

Proposizione 1.34. In una categoria triangolata ciascun monomorfismo spezza[6].

Dimostrazione. Consideriamo un monomorfismo $f : X \to Y$ e completiamolo ad un d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$. Allora $f \circ T^{-1}(h) = 0$ per l'assioma **TR3** e la Proposizione 1.25, ma dato che f è mono deduciamo che $T^{-1}(h) = 0$ e quindi $h = 0$. Dagli assiomi sappiamo che $Z \to Z \to 0 \to TZ$ e quindi $0 \to Z \to Z \to 0$ sono d.t. e inoltre anche il triangolo $X \to X \to 0 \to TX$ è distinto. Ma allora, per quanto visto poc'anzi, la loro somma diretta $X \to X \oplus Z \to Z \xrightarrow{0} TX$ è un triangolo distinto. Per l'assioma **TR4**, le identità su X e Z inducono un morfismo fra questo triangolo e il primo e poiché due delle mappe sono isomorfismi, per la Proposizione 1.29, lo è anche la terza, da cui la tesi. $\square$

Questo risultato è chiaramente falso in generale in una categoria abeliana: un classico controesempio è la successione esatta $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_2 \to 0$ in $\mathbf{Ab}$.

[6] La nozione di successione esatta che spezza, in una categoria abeliana, è completamente analoga a quella "classica", che si definisce nel caso dei moduli.

Capitolo 2

Il teorema di rappresentabilità di Brown

In questo capitolo supporremo che le categorie triangolate ammettano somme dirette[1] arbitrarie purché piccole (in senso categoriale). In particolare, le somme dirette numerabili esisteranno sempre.

2.1 Colimiti omotopici

I colimiti omotopici sono una costruzione tipica della moderna topologia algebrica, tuttavia rivestono un'importanza fondamentale anche in algebra e saranno un punto chiave nella dimostrazione del teorema di rappresentabilità di Brown.

Definizione 2.1. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata e supponiamo di avere una successione di morfismi in $\mathbf{T}$

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} X_3 \xrightarrow{j_4} \cdots$$

Sia $\mu : \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i$ il morfismo indotto dai $j_{i+1} : X_i \to X_{i+1}$, cioè tale da far commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_{i+1}"'] & \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} X_i \arrow[d, "\mu"] \\
X_{i+1} \arrow[r, hook] & \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} X_i
\end{tikzcd}$$

[1] Intese come coprodotti.

Un *colimite omotopico* della successione, indicato con $\underrightarrow{\text{holim}}\, X_i$, è un oggetto che completa il morfismo μ ad un triangolo distinto

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \longrightarrow \underrightarrow{\text{holim}}\, X_i \longrightarrow T\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i\Big)$$

Spesso la mappa μ è indicata con $1-$*shift* e, con abuso di notazione, si indicano con $1-shift$ anche le mappe da essa ricavate (ad esempio come immagine mediante un qualche funtore).

Osservazione 2.2. Sfruttando l'assioma **TR4** e la Proposizione 1.29, si osserva che un colimite omotopico (se esiste) è unico a meno di isomorfismo, ma non a meno di un unico isomorfismo. Dalla definizione discende subito che ci sono morfismi $X_i \longrightarrow \underrightarrow{\text{holim}}\, X_i$ compatibili con i j_i. Inoltre, per **TR2**, $\underrightarrow{\text{holim}}\, X_i$ esiste se esiste $\bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i$. Dato che in tutto questo capitolo lavoreremo con categorie triangolate che ammettono coprodotti numerabili, quest'ultima condizione è sempre verificata.

Lemma 2.3. Supponiamo di avere due successioni

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \cdots$$

$$Y_0 \longrightarrow Y_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y_3 \longrightarrow \cdots$$

allora $\underrightarrow{\text{holim}}(X_i \oplus Y_i) \cong (\underrightarrow{\text{holim}}\, X_i) \oplus (\underrightarrow{\text{holim}}\, Y_i)$.

Dimostrazione. Poiché la somma diretta di due d.t. è un d.t., si ha il seguente triangolo distinto

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} Y_i \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} Y_i \to (\underrightarrow{\text{holim}}\, X_i) \oplus (\underrightarrow{\text{holim}}\, Y_i) \to T\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} Y_i\Big)$$

da cui si deduce l'isomorfismo. □

Osservazione 2.4. Consideriamo un morfismo di successioni, cioè dei morfismi $f_i : X_i \to Y_i$ che fanno commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "f_0"'] & X_1 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "j_3"] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[r, "j_4"] \arrow[d, "f_3"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, "k_1"] & Y_1 \arrow[r, "k_2"] & Y_2 \arrow[r, "k_3"] & Y_3 \arrow[r, "k_4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Allora, per ogni scelta dei colimiti omotopici, esiste un morfismo indotto $\underrightarrow{\text{holim}}\, X_i \longrightarrow \underrightarrow{\text{holim}}\, Y_i$. In particolare, successioni isomorfe hanno colimiti omotopici isomorfi.

2.2 Generatori di categorie triangolate

Definizione 2.5. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata e sia $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$ un sottoinsieme non vuoto di oggetti di $\mathbf{T}$. Si dice che $\mathcal{F}$ è un *insieme di generatori perfetti per* $\mathbf{T}$ (o *genera perfettamente* $\mathbf{T}$) se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) Per ogni $X \in \mathbf{T}$ t.c. $\mathrm{Hom}(C, X) \cong 0 \ \forall C \in \mathcal{F}$, si ha che $X \cong 0$

(ii) Per ogni famiglia numerabile $\{X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ di morfismi in $\mathbf{T}$ tale che la mappa $\mathrm{Hom}(C, X_i) \to \mathrm{Hom}(C, Y_i)$ si annulla per ogni $i \in I$ e ogni $C \in \mathcal{F}$, la mappa indotta

$$\mathrm{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} X_i\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} Y_i\right)$$

si annulla per ogni $C \in \mathcal{F}$.

Se esiste un insieme di generatori perfetti per $\mathbf{T}$ si dice che $\mathbf{T}$ è *perfettamente generata.*

Osservazione 2.6. La seconda condizione può essere riformulata in molti modi. Ciascuna delle condizioni seguenti è equivalente alla (ii):

(ii)′ Per ogni famiglia numerabile $\{X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ di morfismi in $\mathbf{T}$ tale che la mappa $\mathrm{Hom}(C, X_i) \to \mathrm{Hom}(C, Y_i)$ è surgettiva per ogni $i \in I$ e ogni $C \in \mathcal{F}$, la mappa indotta $\mathrm{Hom}(C, \bigoplus_{i \in I} X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, \bigoplus_{i \in I} Y_i)$ è surgettiva per ogni $C \in \mathcal{F}$.

(ii)″ Per ogni famiglia numerabile $\{X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ di morfismi in $\mathbf{T}$ tale che la mappa $\mathrm{Hom}(C, X_i) \to \mathrm{Hom}(C, Y_i)$ è ingettiva per ogni $i \in I$ e ogni $C \in \mathcal{F}$, la mappa indotta $\mathrm{Hom}(C, \bigoplus_{i \in I} X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, \bigoplus_{i \in I} Y_i)$ è ingettiva per ogni $C \in \mathcal{F}$.

Infatti, considerando il d.t. $X \to Y \to Z \to TX$ ed applicando il funtore coomologico $\mathrm{Hom}(C, -)$ si ottiene la successione esatta lunga

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(C, T^{-1}Z) \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(C, Y) \to \mathrm{Hom}(C, Z) \to \cdots$$

che giustifica l'equivalenza

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(C, Y) \text{ è la mappa nulla} \\ \iff \mathrm{Hom}(C, Y) \to \mathrm{Hom}(C, Z) \text{ è ingettiva} \\ \iff \mathrm{Hom}(C, T^{-1}Z) \to \mathrm{Hom}(C, X) \text{ è surgettiva} \end{gathered}$$

La condizione (ii) è anche equivalente alla condizione seguente:

(iii) Per ogni famiglia numerabile $\{X_i\}_{i\in I}$ di oggetti di $\mathbf{T}$, per ogni $C \in \mathcal{F}$ e per ogni morfismo $f : C \to \bigoplus_{i\in I} X_i$, esiste una famiglia di morfismi $C_i \to X_i$ t.c. f si decompone in $C \to \bigoplus_{i\in I} C_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ dove ogni C_i è una somma diretta di oggetti in $\mathcal{F}$.

Infatti, sia $\mathbf{S}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{T}$ formata da somme dirette di elementi di $\mathcal{F}$. Se un morfismo $X \to Y$ in $\mathbf{T}$ soddisfa la condizione che $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, Y)$ si annulla per ogni $C \in \mathcal{F}$, allora lo stesso vale per ogni $C \in \mathbf{S}$. Da ciò segue l'implicazione (iii) $\Rightarrow$ (ii). Per l'implicazione opposta si veda [KS06] rmk. 10.5.4.
La condizione (iii) è una conseguenza della seguente

(iii)´ Per ogni famiglia numerabile $\{X_i\}_{i\in I}$ di oggetti di $\mathbf{T}$, per ogni $C \in \mathcal{F}$ e per ogni morfismo $f : C \to \bigoplus_{i\in I} X_i$, esiste una famiglia di morfismi $C_i \to X_i$, con $C_i \in \mathcal{F}$, t.c. f si scrive come $C \to \bigoplus_{i\in I} C_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$.

In definitiva, per un insieme $\mathcal{F}$ di oggetti di $\mathbf{T}$, si ha

$$\text{(ii)} \iff \text{(ii)}' \iff \text{(ii)}'' \iff \text{(iii)} \Longleftarrow \text{(iii)}'$$

Osservazione 2.7. Se $\mathcal{F}$ è un insieme di generatori perfetti allora lo è anche $\{T^n(C) | n \in \mathbb{Z}, C \in \mathcal{F}\}$. Per cui una categoria triangolata con coprodotti ha un insieme di generatori perfetti se e solo se ha un insieme di generatori perfetti chiuso rispetto allo shift.

Definizione 2.8. Un oggetto K di $\mathbf{T}$ è detto *compatto* se

$$\mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i\in I} X_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(K, X_i)$$

per ogni insieme $\{X_i\}_{i\in I}$ di oggetti di $\mathbf{T}$.

Si osserva che lo shift di un oggetto compatto è ancora un oggetto compatto.

Osservazione 2.9. Come immediata conseguenza della Definizione 2.8 si deduce che ogni sottoinsieme di oggetti compatti di una categoria triangolata soddisfa la seconda condizione della Definizione 2.5.

Lemma 2.10. Se K è un oggetto compatto di $\mathbf{T}$ e

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \cdots$$

è una successione di morfismi di $\mathbf{T}$, allora si ha che

$$\mathrm{Hom}(K, \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i) \cong \varinjlim \mathrm{Hom}(K, X_i)$$

Dimostrazione. Consideriamo il triangolo distinto usato per definire $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i$ e applichiamo il funtore $\mathrm{Hom}(K, -)$, ottenendo una successione esatta. Poiché K è compatto e T commuta coi coprodotti, abbiamo un diagramma commutativo dove le righe sono esatte e le mappe verticali sono isomorfismi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(K, \varinjlim_{\text{holim}} X_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i=0}^{\infty} T(X_i)\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i=0}^{\infty} T(X_i)\right) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(K, \varinjlim_{\text{holim}} X_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(K, T(X_i)) \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(K, T(X_i))
\end{tikzcd}$$

Il secondo morfismo della riga inferiore è ovviamente iniettivo, sicché il morfismo

$$\mathrm{Hom}(K, \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i=0}^{\infty} T(X_i)\right)$$

è il morfismo zero. Perciò, sfruttando sempre la compattezza di K, si ha che le righe del seguente diagramma sono esatte e le colonne sono isomorfismi:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\left(K, \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K, \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(K, X_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(K, X_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K, \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e la riga inferiore identifica $\varinjlim \mathrm{Hom}(K, X_i)$ e $\mathrm{Hom}(K, \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i)$ attraverso un isomorfismo naturale (cfr. [KS06] ex. 8.37). □

Definizione 2.11. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata e sia $\mathcal{F}' \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$ un sottoinsieme non vuoto di oggetti di $\mathcal{T}$. Si dice che $\mathcal{F}'$ è un *insieme di generatori compatti per* $\mathbf{T}$ (o *genera compattamente* $\mathbf{T}$) se soddisfa il punto (i) della Definizione 2.5 e ogni oggetto $K \in \mathcal{F}'$ è compatto.

Se $\mathbf{T}$ ammette un insieme di generatori compatto, si dice che $\mathbf{T}$ è *compattamente generata*. Dall'Osservazione 2.9 segue che un insieme di generatori compatti è anche un insieme di generatori perfetti, dunque ogni categoria triangolata compattamente generata è perfettamente generata e, pertanto, ad essa si applica il teorema di rappresentabilità di Brown.

2.3 Il teorema di Brown

Prima di arrivare a dimostrare il teorema di rappresentabilità di Brown sono necessari una serie di risultati ed osservazioni preliminari.
Iniziamo dalla seguente definizione, che introduce alcune tipologie di sottocategorie di una categoria abeliana.

Definizione 2.12. Sia $\mathbf{C}$ una categoria abeliana e $\mathbf{J}$ una sua sottocategoria piena. Indichiamo con $\mathbf{J}'$ la sottocategoria piena di $\mathbf{C}$ tale che $X \in \mathbf{J}' \Leftrightarrow \exists\, Y \in \mathbf{J}$ t.c. $X \cong Y$.

1. Si dice che $\mathbf{J}$ è chiusa rispetto ai kernel (risp. cokernel) se per ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathbf{J}$, $\ker f$ (risp. $\operatorname{coker} f$) appartiene a $\mathbf{J}'$.

2. Si dice che $\mathbf{J}$ è chiusa per estensioni in $\mathbf{C}$ se per ogni successione esatta $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathbf{C}$ t.c. $X', X'' \in \mathbf{J}$, si ha che $X \in \mathbf{J}'$.

3. Si dice che $\mathbf{J}$ è una sottocategoria *pienamente abeliana* di $\mathbf{C}$ se $\mathbf{J}$ è una sottocategoria abeliana piena di $\mathbf{C}$ e il funtore di inclusione è esatto.

Sia $\mathbf{S}$ una categoria additiva localmente piccola che ammette somme dirette piccole. Denotiamo con $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$ la categoria dei funtori additivi da $\mathbf{S}^{\mathrm{op}}$ ad $\mathbf{Ab}$, che è una categoria abeliana (in generale non piccola) e può essere vista come una sottocategoria piena di $\widehat{\mathbf{S}}$ (cfr. [KS06] prop. 8.2.12).
Un complesso $F' \to F \to F''$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$ è esatto se e solo se $F'(X) \to F(X) \to F''(X)$ è esatto per ogni $X \in \mathbf{S}$. Sia $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ la sottocategoria piena di $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$ formata dai funtori additivi F che commutano con i prodotti piccoli, cioè tali che $F(\oplus_i X_i) \cong \prod_i F(X_i)$ per ogni insieme $\{X_i\}_i$ di oggetti di $\mathbf{S}$. Si ha allora il seguente

Lemma 2.13. La categoria $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ è una sottocategoria pienamente abeliana di $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$ chiusa per estensioni.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che, prendendo un complesso esatto $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to F_5$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$, se $F_j \in [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ per ogni $j \neq 3$, allora anche F_3 appartiene a $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ (cfr. [KS06] rmk. 8.3.22). Quest'ultima condizione segue dal lemma dei 5. □

Supponiamo adesso che sussista la seguente condizione:

$$\begin{array}{l}\text{esiste una sottocategoria piccola piena } \mathbf{S}_0 \text{ di } \mathbf{S} \text{ t.c. ogni} \\ \text{oggetto di } \mathbf{S} \text{ è una somma diretta piccola di oggetti di } \mathbf{S}_0.\end{array} \qquad (\star)$$

Da ciò segue che un complesso $F' \to F \to F''$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ è esatto se e solo se $F'(X) \to F(X) \to F''(X)$ è esatto per ogni $X \in \mathbf{S}_0$. In particolare il funtore di restrizione $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}} \to [\mathbf{S}_0^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{add}}$ è esatto, fedele e conservativo. Cioè, la categoria $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ è localmente piccola. Il funtore

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-) : \mathbf{S} &\longrightarrow [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}} \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X) \end{aligned}$$

è ben definito perché $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X)$ commuta con i prodotti piccoli. Dato che $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}} \to \widehat{\mathbf{S}}$ è pienamente fedele, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-)$ è un funtore additivo pienamente fedele per il lemma di Yoneda.

Lemma 2.14. Supponiamo che esista un $\mathbf{S}_0$ come sopra. Allora, per ogni $F \in [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$, $\exists\ X \in \mathbf{S}$ e un epimorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X) \twoheadrightarrow F$.

Dimostrazione. cfr. [KS06] lemma 10.5.6. □

Lemma 2.15. Nelle ipotesi precedenti, si hanno le seguenti proprietà.

(i) Il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-) : \mathbf{S} \to [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ commuta con le somme dirette piccole.

(ii) La categoria abeliana $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ ammette somme dirette piccole.

Dimostrazione. (i) Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ un insieme di oggetti di $\mathbf{S}$ e sia $F \in [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$. La tesi segue dalla seguente catena di isomorfismi

$$\begin{aligned}[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}(\mathrm{Hom}(-, \textstyle\bigoplus_{i\in I} X_i), F) &\cong F(\textstyle\bigoplus_{i\in I} X_i) \\ &\cong \textstyle\prod_{i\in I} F(X_i) \\ &\cong \textstyle\prod_{i\in I} [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}(\mathrm{Hom}(-, X_i), F)\end{aligned}$$

(ii) Sia $\{F_i\}_{i\in I}$ un insieme di oggetti di $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$. Per il Lemma 2.14 esiste una successione esatta $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, Y_i) \to F_i \to 0$, con $X_i, Y_i \in \mathbf{S}$. Poiché $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-)$ è pienamente fedele, esiste un morfismo $X_i \to Y_i$ che induce il morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, Y_i)$. Allora si ha

$$\begin{aligned}&\mathrm{coker}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, \textstyle\bigoplus_{i\in I} X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, \textstyle\bigoplus_{i\in I} Y_i)\Big) \cong \\ &\qquad \cong \mathrm{coker}\Big(\textstyle\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X_i) \to \textstyle\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, Y_i)\Big) \\ &\qquad \cong \textstyle\bigoplus_{i\in I} \mathrm{coker}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-, Y_i)\Big) \\ &\qquad \cong \textstyle\bigoplus_{i\in I} F_i\end{aligned}$$

□

Facciamo adesso un passo indietro e consideriamo una categoria triangolata $\mathbf{T}$ perfettamente generata. A meno di sostituire l'insieme di generatori perfetti $\mathcal{F}$ con $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{F}$ possiamo supporre dal principio che esso sia chiuso rispetto allo shift. Sia $\mathbf{S}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{T}$ formata dalle somme dirette piccole di oggetti di $\mathcal{F}$. Allora $\mathbf{S}$ è una categoria additiva che ammette somme dirette piccole. Per di più, $T\mathbf{S} = \mathbf{S}$ e T induce un automorfismo $\widetilde{T} : [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}} \to [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ mediante la posizione $(\widetilde{T}F)(C) = F(T^{-1}C)$ per $F \in [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ e $C \in \mathbf{S}$. Per costruzione, $\mathbf{S}$ soddisfa la condizione $(\star)$ e quindi $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ è una categoria abeliana localmente piccola e valgono i lemmi precedenti[2]. Si noti che un complesso $F' \to F \to F''$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ è esatto se e solo se $F'(C) \to F(C) \to F''(C)$

[2] Questa è la ragione per cui abbiamo indicato con $\mathbf{S}$ sia la categoria presentata all'inizio della sezione che quest'ultima appena costruita.

è esatto per ogni $C \in \mathcal{F}$.
Prolunghiamo il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-)$ definito in precedenza al funtore

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,-) : \mathbf{T} &\longrightarrow [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}} \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X) \end{aligned}$$

Si ha che $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,-)$ commuta con T. Si nota inoltre che, nonostante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,-)$ sia pienamente fedele, in generale il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,-)$ non è fedele. Dalla definizione segue, però, che quest'ultimo è coomologico. Vale, inoltre, il seguente

Lemma 2.16. Si ha che:

(i) se $\{X_i \to Y_i\}$ è una famiglia numerabile di morfismi di $\mathbf{T}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,Y_i)$ è un epimorfismo per ogni i, allora $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}\big(-,\bigoplus_{i\in I} X_i\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}\big(-,\bigoplus_{i\in I} Y_i\big)$ è un epimorfismo.

(ii) il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,-) : \mathbf{T} \to [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$ commuta con le somme dirette numerabili.

Dimostrazione. cfr. [KS06] lemma 10.5.8 □

Sia $H : \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ un funtore coomologico che commuta con i prodotti piccoli. La restrizione di H a $\mathbf{S}^{\mathrm{op}}$ definisce un $H_0 \in [\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$.

Lemma 2.17. Sia H come sopra e sia $\mathbf{K}$ una sottocategoria triangolata piena di $\mathbf{T}$ t.c. $\mathcal{F} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}$ è chiusa rispetto alle somme dirette piccole. Allora esiste un diagramma commutativo in $\widehat{\mathbf{T}}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(-,X_0) \arrow[r] \arrow[drrrr] & \mathrm{Hom}(-,X_1) \arrow[r] \arrow[drrr] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(-,X_n) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\ & & & & H \end{tikzcd}$$

t.c. $X_n \in \mathbf{K}$ e $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_{n+1})) \cong H_0$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.14 possiamo prendere un $X_0 \in \mathbf{S}$ e trovare un epimorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,X_0) \twoheadrightarrow H_0$ in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$. Costruiremo $X_n \in \mathbf{K}$ in maniera induttiva. Ipotizziamo di aver costruito la successione fino ad X_n e che $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_{i+1})) \cong H_0$ per ogni $0 \le i < n$. Consideriamo una successione esatta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,Z_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to H_0 \to 0$$

con $Z_n \in \mathbf{S}$. Prendiamo un triangolo distinto

$$Z_n \to X_n \to X_{n+1} \to TZ_n$$

Dato che Z_n e X_n appartengono a $\mathbf{K}$, anche X_{n+1} appartiene a $\mathbf{K}$. Inoltre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(-,Z_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to H$ è il morfismo zero e H è coomologico, dunque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to H$ si fattorizza attraverso $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_{n+1})$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_{n+1})\big) &\cong \mathrm{Coim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_{n+1})\big)\\ &= \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,Z_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n)\big)\\ &= \mathrm{Coim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to H_0\big)\\ &\cong \mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X_n) \to H_0\big)\\ &= H_0 \qquad \square\end{aligned}$$

Consideriamo il funtore $\mathbb{N} \to \widehat{\mathbf{T}}$ costruito nel lemma precedente. Poiché H commuta coi prodotti, i morfismi $\mathrm{Hom}(-,X_n) \longrightarrow H$ danno luogo al morfismo $\mathrm{Hom}\big(-,\bigoplus_{n\geq 0} X_n\big) \longrightarrow H$. Per di più, come conseguenza della commutatività del diagramma, si ha che

$$\mathrm{Hom}\left(-,\bigoplus_{n\geq 0} X_n\right) \xrightarrow{1-shift} \mathrm{Hom}\left(-,\bigoplus_{n\geq 0} X_n\right) \longrightarrow H$$

è il morfismo nullo.

Lemma 2.18. La successione

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}\left(-,\bigoplus_{n\geq 0} X_n\right) \xrightarrow{1-shift} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}\left(-,\bigoplus_{n\geq 0} X_n\right) \longrightarrow H_0 \to 0$$

è esatta in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}},\mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$.

Dimostrazione. cfr. [KS06] lemma 10.5.11 $\square$

Lemma 2.19. Esiste un oggetto $Z \in \mathbf{K}$ e un morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,Z) \to H$ che induce un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C,Z) \cong H(C)$ per ogni $C \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Sia $Z = \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, X_i$ e $X = \bigoplus_{n\geq 0} X_n$. Poiché H è coomologico, $\mathrm{Hom}(-,X) \to H$ fattorizza attraverso Z. Per la coomologicità di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,-)$, si ha la successione esatta in $[\mathbf{S}^{\mathrm{op}},\mathbf{Ab}]_{\mathrm{prod}}$

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[r, "1-shift"] & h_X \arrow[r] & h_Z \arrow[r] & h_{TX} \arrow[r, "1-shift"] \arrow[d, "\cong"'] & h_{TX} \arrow[d, "\cong"'] \\ & & & T(h_X) \arrow[r] & T(h_X) \end{tikzcd}$$

Applicando il Lemma 2.18, si verifica che gli ultimi morfismi a destra sono monomorfismi. Per cui, dopo calcoli analoghi a quelli fatti nel Lemma 2.18, si trova $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,Z) \cong \mathrm{Coker}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X) \xrightarrow{1-shift} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-,X)\big) \cong H_0$
$\square$

Lemma 2.20. Il funtore naturale $\mathbf{K} \to \mathbf{T}$ dà luogo ad una equivalenza di categorie.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che è un funtore pienamente fedele ed essenzialmente surgettivo. La prima parte è vera per ipotesi. Resta da provare che è essenzialmente surgettivo. Per fare ciò prendiamo $X \in \mathbf{T}$ ed applichiamo il Lemma 2.19 al funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, X)$, ottenendo $Z \in \mathbf{K}$ ed un morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, X)$ che induce un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, X)$ per ogni $C \in \mathcal{F}$. Si conclude usando la definizione di $\mathcal{F}$ e l'embedding di Yoneda. $\square$

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare il teorema di rappresentabilità di Brown.

Teorema 2.21. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata perfettamente generata. Sia $H : \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ un funtore coomologico per cui valga l'isomorfismo

$$H\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} H(X_i)$$

per ogni insieme $\{X_i\}_{i \in I}$ di oggetti di $\mathbf{T}$. Allora H è rappresentabile.

Dimostrazione. Sia Z come nel Lemma 2.19 e dimostriamo che il morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, Z) \to H$ è un isomorfismo. Per arrivare a questo risultato definiamo $\mathbf{K}$, sottocategoria piena di $\mathbf{T}$ formata dagli oggetti Y per i quali $\mathrm{Hom}(T^n Y, Z) \to H(T^n Y)$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Allora $\mathbf{K}$ contiene $\mathcal{F}$, è chiusa rispetto alla formazione di somme dirette piccole ed è una sottocategoria triangolata di $\mathbf{T}$. Quindi $\mathbf{K} = \mathbf{T}$ per il Lemma 2.20. $\square$

Corollario 2.22. Sia $\mathbf{T}$ una categoria triangolata perfettamente generata. Si ha che:

1. $\mathbf{T}$ ammette prodotti piccoli.
2. Sia $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ un funtore triangolato che commuta con le somme dirette piccole. Allora F ha un aggiunto destro G.

Dimostrazione.

1. Dato un insieme $\{X_i\}_{i \in I}$ di oggetti di $\mathbf{T}$, il funtore
$$Z \mapsto \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(Z, X_i)$$
è coomologico e commuta con i prodotti piccoli. Dunque è rappresentabile.
2. Per ogni $Y \in \mathbf{T}'$, il funtore $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}'}(F(X), Y)$ è rappresentabile per il Teorema 2.21. Quindi F ha un aggiunto destro.

$\square$

Non è difficile vedere che G è a sua volta un funtore triangolato.

Capitolo 3

Un'applicazione alla teoria dell'omotopia

In quest'ultima parte presentiamo, senza dimostrarla, la "versione originale" del teorema di rappresentabilità di Brown e la utilizziamo per una dimostrazione non costruttiva dell'esistenza degli spazi di Eilenberg-MacLane. In tutto il capitolo le funzioni, salvo avviso contrario, saranno considerate (almeno) continue.

3.1 Il teorema di Brown "classico"

Iniziamo con qualche richiamo di topologia algebrica[1]. Per una trattazione più approfondita si rimanda ad un qualunque testo introduttivo di topologia algebrica, come ad esempio [JPM99] o [Rot88].

Definizione 3.1. Un CW complesso è uno spazio X ottenuto come unione di una sequenza di sottospazi X^n in modo tale che, induttivamente, X^0 è un insieme discreto di punti e X^{n+1} è il pushout ottenuto da X^n attaccando dischi (aperti) D^{n+1} mediante "mappe di attaccamento" $j : S^n \to X^n$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X^n \arrow[d] \\ D^{n+1} \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

Cioè, se chiamiamo J_{n+1} l'insieme di tali mappe j, si ha che X^{n+1} è lo spazio quoziente ottenuto da $X^n \cup (J_{n+1} \times D^{n+1})$ identificando (j, x) con $j(x)$ per ogni $x \in S^n$. Ogni mappa (o, più spesso, il suo dominio) $D^{n+1} \to X$ è chiamata $(n+1)$-*cella*. Il sottospazio X^n è chiamato l'n-*scheletro* di X.

[1] Per evitare patologie supponiamo di lavorare con categorie di spazi sufficientemente regolari, ad esempio compattamente generati e connessi per archi, sebbene molte costruzioni e proprietà seguenti valgano più in generale.

Esempio 3.2. Ogni grafo è un CW complesso 1-dimensionale[2].

Esempio 3.3. La n-sfera ammette struttura di CW complesso con due celle, una 0-cella e una n-cella, ottenuta attaccando la n-cella alla 0-cella attraverso la mappa costante di dominio S^{n-1}. Alternativamente, identificando S^{n-1} con un equatore di S^n, notiamo che S^{n-1} ha come complementare due dischi, cioè gli emisferi. Induttivamente, si può perciò dare a S^n una decomposizione con due celle in ogni dimensione k tale che $0 \leq k \leq n$.

Esempio 3.4. Poiché lo spazio proiettivo reale è il quoziente di S^n ottenuto identificando i punti antipodali, si deduce che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un CW complesso con una cella in ogni dimensione.

Definizione 3.5. Dati X, Y due CW complessi, una $f : X \to Y$ continua si dice *cellulare* se $f(X^n) \subseteq Y^n$ per ogni n.

Si possono, inoltre, definire i sottocomplessi A di un CW complesso X in maniera tale che siano dei sottospazi di X e che abbiano una struttura di CW complesso che rende la composizione $D^n \to A \hookrightarrow X$ una cella di X. A partire da un sottocomplesso $A \subseteq X$ si definisce il CW complesso relativo o *CW-coppia* (X, A) considerando su di essa la struttura di CW complesso.

Definizione 3.6. Sia $\Delta^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^n t_i = 1,\ t_i \geq 0\ \forall i\}$ l'n-simplesso standard e sia X uno spazio topologico. Un n-simplesso singolare σ_n è un'applicazione continua $\sigma_n : \Delta^n \to X$.

Dato che Δ^1 è un intervallo chiuso, un 1-simplesso singolare è essenzialmente un arco in X; dato che Δ^0 è un insieme con un solo elemento, un 0-simplesso singolare può essere identificato con un punto in X.

Definizione 3.7. Sia X uno spazio topologico. Per ogni $n \geq 0$, definiamo il gruppo abeliano libero $C_n(X)$ che ha per base gli n-simplessi singolari in X. Gli elementi di $C_n(X)$ sono chiamate n-catene singolari in X.

Si costruiscono opportuni operatori di bordo $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ tali che $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ che rendono $(C_\bullet(X), \partial)$ un complesso di catene, detto *complesso singolare* di X. L'omologia di questo complesso è detta *omologia singolare* di X. Osservando che per ogni $f : X \to Y$ continua, la mappa indotta $f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$ manda cicli in cicli e bordi in bordi e fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_*"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "f_*"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

[2] La dimensione di un CW complesso è definita come il massimo delle dimensioni delle sue celle.

si deduce che per ogni $n \geq 0$, $H_n : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ è un funtore covariante.
Nella definizione del complesso singolare abbiamo tacitamente imposto che $C_n(X) = 0 \ \forall n < 0$. C'è, però, un altro modo interessante di completare il complesso singolare per i valori negativi di n.

Definizione 3.8. Sia $(C_\bullet(X), \partial)$ il complesso singolare dello spazio X. Poniamo $\widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ e $\widetilde{C}_n(X) = 0 \ \forall n < -1$ ottenendo il complesso

$$\cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dove $\widetilde{\partial}_0(\sum_\sigma m_\sigma \sigma) = \sum_\sigma m_\sigma$, chiamato *complesso singolare aumentato* di X.

Dai conti si vede che $\widetilde{\partial}_0 \circ \partial_1 = 0$, sicché il complesso singolare aumentato è effettivamente un complesso. La sua omologia è detta *omologia ridotta*.
È interessante notare che, per ogni $n > 0$, si ha che $H_n(X) = \widetilde{H}_n(X)$, mentre $H_0(X) = \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Questa definizione porta a notevoli semplificazioni concettuali, ad esempio rende nulli tutti i gruppi di omologia di un punto.

Dato un gruppo abeliano[3] G, possiamo applicare il funtore $\mathrm{Hom}(-, G)$ ad ogni $C_n(X)$ e ogni ∂_n ottenendo il complesso di cocatene

$$\cdots \longrightarrow C^*_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} C^*_n(X) \xrightarrow{d_n} C^*_{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

dove i $C^*_i(X)$ sono i gruppi duali dei $C_i(X)$ e le mappe sono quelle indotte.

Definizione 3.9. Per ogni intero n, si definisce l'n-esimo gruppo di coomologia singolare di X come il gruppo quoziente $H^n(X, G) = \ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n-1})$.

In maniera analoga a quanto fatto sopra, si dimostra che questi gruppi definiscono dei funtori controvarianti $H^n(-, G) : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$. Si introduce similmente la nozione di coomologia ridotta.

Proposizione 3.10. Sia $n > 0$ e sia S^n la n-sfera, allora

$$\widetilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Dimostrazione. cfr. teorema 6.5 in [Rot88] □

Osservazione 3.11. Usando questo risultato si arriva a dimostrare che, dato un gruppo abeliano G, risulta

$$\widetilde{H}^k(S^n, G) = \begin{cases} G & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

[3] In realtà tale procedura si può ripetere con un più generico modulo su PID.

Proseguiamo con altre costruzioni basilari.
Nel seguito, (X, x_0) è uno spazio topologico puntato e $I = [0, 1]$ è l'intervallo unitario.

Definizione 3.12. La *sospensione ridotta* ΣX di X è lo spazio quoziente

$$\Sigma X = (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$$

Definizione 3.13. Lo *spazio dei loop* ΩX è lo spazio delle funzioni continue (con la topologia compatta-aperta) da S^1 a X che preservano il punto base

$$\Omega X = \mathcal{C}(S^1, X)_* = \{f \in \mathcal{C}(I, X) | f(0) = f(1) = x_0\}$$

Definizione 3.14. Se (Y, y_0) è un altro spazio puntato, si definisce il *prodotto smash*

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$$

in cui abbiamo identificato X e Y con le loro copie omeomorfe $X \times \{y_0\}$ e $\{x_0\} \times Y$ che sono sottospazi del prodotto tali che la loro unione è omeomorfa al wedge $X \vee Y$.

Definizione 3.15. Il *cilindro* (o *mapping cylinder*) di $f : X \to Y$ è lo spazio

$$M_f = ((X \times I) \sqcup Y)/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza generata da $(x, 0) \sim f(x)$ $\forall x \in X$.

La seguente proposizione mette in luce una stretta parentela fra sospensione ridotta e prodotto smash.

Proposizione 3.16. Si hanno i seguenti omeomorfismi:

- $\Sigma X \cong X \wedge S^1$
- $S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$

Dimostrazione. Per la prima parte, ricordando che $S^1 \cong I/\partial I$, possiamo scrivere $X \wedge S^1 = (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup X \vee S^1) \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) = \Sigma X$.
Per la seconda parte, costruendo S^n come un CW complesso formato da una 0-cella e una n-cella, è immediato vedere che $S^m \wedge S^n$ (come quoziente del prodotto) ha soltanto una 0-cella e una $(m+n)$-cella, e dunque è omeomorfo a S^{m+n}. $\square$

Osservazione 3.17. Possiamo vedere il prodotto smash come il pushout

$$\begin{tikzcd}
X \vee Y \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d] \\
S^0 \arrow[r] & X \wedge Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

in cui S^0 è la 0-sfera formata dai punti base di X e Y. In virtù della proposizione precedente anche la sospensione ridotta è un pushout, essendo sostanzialmente un particolare prodotto smash.

Osservazione 3.18. Se $f : X \to Y$ è un morfismo di $\mathbf{Top}_*$ (la categoria degli spazi topologici puntati) si vede che $f \times \mathrm{id}_I$ è compatibile rispetto alla sospensione ridotta e induce una $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ t.c. $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ e si può altresì definire $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ con l'assegnazione $\gamma \mapsto f \circ \gamma$. Da ciò $-$ dopo ulteriori verifiche $-$ si deduce che Σ e Ω sono funtori $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$.

Perdipiù Σ e Ω rispettano le equivalenze omotopiche e quindi passano al quoziente, definendo di fatto dei funtori $\mathbf{hTop}_* \to \mathbf{hTop}_*$. Inoltre, per ogni $X, Y \in \mathbf{hTop}_*$ si ha[4] che $[\Sigma X, Y]_*$ e $[X, \Omega Y]_*$ sono gruppi. Il risultato seguente consente di dire qualcosa in più.

Proposizione 3.19. Σ e Ω sono una coppia di funtori aggiunti.

Dimostrazione. Basta vedere che una $f : \Sigma X \to Y$ corrisponde ad una $g : X \to \Omega Y$ se $f(x,s) = g(x)(s)$. Questa corrispondenza si verifica essere un isomorfismo di gruppi $[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$, i.e. $\Sigma \dashv \Omega$. □

Definizione 3.20. Per ogni intero $n > 0$, l'insieme delle classi di omotopia di funzioni puntate $\pi_n(X, x_0) := [S^n, X]_*$ forma un gruppo, detto n-esimo gruppo di omotopia di X.

Per $n = 0$, $\pi_0(X, x_0)$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X, che $-$ salvo casi particolari $-$ non ha la struttura di gruppo. Si dimostra (e.g. usando l'argomento di Eckmann–Hilton) che i gruppi di omotopia sono abeliani per ogni $n > 1$. Avendo convenuto di usare spazi connessi per archi, possiamo scrivere $\pi_n(X)$ al posto di $\pi_n(X, x_0)$ dato che, in questo caso, i gruppi di omotopia sono invarianti rispetto alla scelta del punto base.

Osservazione 3.21. Usando le proprietà precedenti otteniamo la catena di omeomorfismi

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_* \cong [S^{n-1} \wedge S^1, X]_* \cong [\Sigma S^{n-1}, X]_* \cong [S^{n-1}, \Omega X]_* \cong \cdots \cong$$

$$\cong [S^0, \Omega^n X]_* = \pi_0(\Omega^n X)$$

che permette di apprezzare l'importanza degli spazi di loop iterati in teoria dell'omotopia.

Definizione 3.22. Una $f : X \to Y$ fra due spazi topologici puntati X e Y si dice *equivalenza debole* se la mappa indotta $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo per ogni n.

[4] La notazione qui in uso, di uso comune in letteratura, è $[-,-] := \mathrm{Hom}_{\mathbf{hTop}}(-,-)$

In particolare, nel caso in cui $n = 0$ si ha che f_* è semplicemente una bigezione fra gli insiemi delle componenti connesse per archi di X e Y, condizione automaticamente vera nel caso in cui X e Y siano connessi per archi. Inoltre si verifica facilmente che ogni equivalenza omotopica è un'equivalenza debole, ma il contrario non è sempre vero (lo è però per spazi che hanno lo stesso tipo d'omotopia di un CW complesso).

Concludiamo questa sezione con la formulazione classica del teorema di rappresentabilità di Brown. Questo importante risultato, che potrebbe sembrare assai distante dalla sua generalizzazione nell'ambito delle categorie triangolate, è in realtà molto più vicino di quanto non sembri: nonostante la tesi del teorema sia di natura topologica − un funtore controvariante dalla categoria dell'omotopia dei CW complessi puntati connessi $\mathbf{hCW}_*$ che soddisfa due assiomi, uno sui coprodotti e uno di tipo Mayer-Vietoris, è rappresentabile −, la sua dimostrazione usa delle tecniche che di topologico hanno ben poco ma sono, invece, squisitamente categoriali e invero molto simili a quelle usate nella dimostrazione proposta nel capitolo precedente.

Teorema 3.23. (Brown '62) Sia $F : \mathbf{hCW}_* \to \mathbf{Set}_*$ un funtore controvariante tale che

1. $F\big(\bigvee_i X_i\big) \cong \prod_i F(X_i)$ cioè manda coprodotti (somme wedge) in prodotti
2. se X è un CW complesso puntato e X_1, X_2 sono sottocomplessi puntati di X tali che $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = A$, allora la mappa canonica
$$F(X) \to F(X_1) \times_{F(A)} F(X_2)$$
è surgettiva

allora F è rappresentabile.

Osservazione 3.24. La seconda condizione del Teorema 3.23 può essere espressa, più in generale (ossia nel caso della categoria dell'omotopia degli spazi topologici puntati connessi), richiedendo che F mandi pushout omotopici in pullback deboli. Queste sono versioni "più deboli" delle analoghe costruzioni universali che si incontrano nell'ordinaria teoria delle categorie su cui si potrebbe discutere a lungo[5]. Tuttavia, in questa trattazione ci limitiamo alla formulazione del teorema per come è stata presentata: infatti si può vedere che in $\mathbf{hCW}_*$ le due versioni sono equivalenti.

È importante notare che, per ogni n, il funtore di coomologia ridotta $\widetilde{H}^n(-, G)$ possiede molte buone proprietà, tra le quali quella di essere invariante per

[5] Il concetto di pushout omotopico, caso particolare di colimite omotopico, viene formalizzato nel contesto delle categorie modello.

omotopia − che permette di poterlo definire su **hTop** e di poterlo restringere a $\mathbf{hCW}_*$ − e in più, per alcuni classici risultati, tale funtore soddisfa le ipotesi del Teorema 3.23 ed è perciò rappresentabile. Nel paragrafo seguente vedremo da quale spazio è rappresentato.

3.2 Spazi di Eilenberg-MacLane

Per quanto detto finora possiamo assumere che il funtore di coomologia ridotta $X \to \widetilde{H}^n(X, G)$ sia rappresentabile nella categoria dell'omotopia dei CW complessi puntati (connessi). Questo significa che esiste un CW complesso Q tale che si abbia l'isomorfismo naturale

$$\widetilde{H}^n(X, G) \cong [X, Q]_*$$

Prendendo $X = Q$ l'isomorfismo diventa $\widetilde{H}^n(Q, G) \cong [Q, Q]_*$ e quindi, per il lemma di Yoneda, c'è una classe universale da cui tutte le altre classi di coomologia sono ottenute per pullback, in maniera unica a meno di omotopia. Cioè l'isomorfismo naturale tra i due funtori è determinato dall'assegnazione $\alpha \mapsto \alpha^*(\iota_n)$ dove α è un elemento di $[X, Q]_*$ e ι_n è la classe di coomologia che corrisponde a $\mathrm{id} \in [Q, Q]_*$.
Vediamo adesso come sono fatti i gruppi di omotopia di Q. Ricordando che questi sono le classi di omotopia delle mappe $S^k \to Q$ e applicando il risultato trovato nell'Osservazione 3.11 abbiamo che

$$\pi_k(Q) = [S^k, Q]_* \cong \widetilde{H}^n(S^k, G) = \begin{cases} G & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Ciò che abbiamo appena provato ci motiva a dare la seguente

Definizione 3.25. Sia G un gruppo e n un intero positivo. Uno *spazio di Eilenberg-MacLane di tipo* $K(G, n)$ è un CW complesso $K(G, n)$ tale per cui

$$\pi_i(K(G, n)) = \begin{cases} G & \text{se } i = n \\ 0 & \text{se } i \neq n \end{cases}$$

Osserviamo che se $n \geq 2$, per far sì che $K(G, n)$ esista è necessario che G sia abeliano, il che è ovvia conseguenza della commutatività dei gruppi di omotopia superiori.

Siamo dunque giunti a dimostrare il

Teorema 3.26. Dato un CW complesso X e un gruppo abeliano G, si ha che per ogni intero $n \geq 0$ esiste un isomorfismo naturale

$$\widetilde{H}^n(X, G) \cong [X, K(G, n)]_*$$

In questa maniera si dimostra, in astratto, l'esistenza degli spazi di Eilenberg-MacLane. Utilizzando ulteriori strumenti è possibile dimostrare che gli spazi di Eilenberg-MacLane sono unici a meno di equivalenza debole, ovvero sono identificati univocamente − sebbene in senso debole − dalla coppia (G, n).

Esempio 3.27. S^1 è un esempio di $K(\mathbb{Z}, 1)$. Infatti è ben noto che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_n(S^1) = 0 \ \forall n \geq 2$, dato che il suo rivestimento universale $\mathbb{R}$ è contrattile.

Gli spazi di Eilenberg-MacLane sono di fondamentale importanza in teoria dell'omotopia: ad esempio sono usati per costruire le *torri di Postnikov*, un importante strumento che permette di ricostruire uno spazio topologico a partire dai suoi gruppi di omotopia. Sono anche usati per classificare le *operazioni coomologiche*.

Definizione 3.28. Una operazione coomologica η di tipo (m, n, G, G') è una trasformazione naturale $\eta : \widetilde{H}^m(-, G) \to \widetilde{H}^n(-, G')$ tra funtori definiti su CW complessi.

Per Yoneda, si ha allora che le operazioni coomologiche corrispondono biunivocamente alle classi di omotopia di mappe fra gli spazi di Eilenberg-MacLane che rappresentano i funtori, i.e.

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(\widetilde{H}^m(-, G), \widetilde{H}^n(-, G')) &\cong \mathrm{Nat}([-, K(G, m)]_*, [-, K(G', n)]_*) \\ &\cong [K(G, m), K(G', n)]_* \\ &\cong \widetilde{H}^n(K(G, m), G') \end{aligned}$$

3.3 Osservazioni finali

Ci sono un gran numero di modi possibili di definire l'omologia e, di conseguenza, la coomologia per gli spazi topologici. In questa trattazione abbiamo visto il caso della coomologia singolare e ridotta, ma se ne potrebbero introdurre molte altre, in base anche al tipo di spazio considerato. Alcune possono essere usate per calcolare più agevolmente la coomologia singolare per particolari tipi di spazi topologici: ad esempio la coomologia cellulare per i CW complessi oppure la coomologia di de Rham per le varietà differenziabili. Queste teorie potrebbero fornire risultati diversi per alcuni tipi di spazi, ma ce ne sono molti in cui sono tutte concordi.
Queste osservazioni hanno storicamente portato alla formulazione di una lista di assiomi, noti come *assiomi di Eilenberg-Steenrod*, dimodoché le costruzioni che condividono queste proprietà concordino almeno sui CW complessi. Questi assiomi permettono di definire le *teorie omologiche generalizzate* e le *teorie coomologiche generalizzate*. Per semplicità ci focalizziamo sulla definizione di tali teorie coomologiche generalizzate nel caso della coomologia ridotta per CW complessi.

Definizione 3.29. Una *teoria coomologica ridotta* $\widetilde{h}^\bullet$ sui CW complessi puntati consiste di una successione di funtori $\widetilde{h}^n : \mathbf{hCW}_* \to \mathbf{Ab}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

- ESATTEZZA Se A è un sottocomplesso di X, allora la successione
$$\widetilde{h}^n(X \backslash A) \longrightarrow \widetilde{h}^n(X) \longrightarrow \widetilde{h}^n(A)$$
è esatta.
- SOSPENSIONE Per ogni n esiste un isomorfismo naturale
$$\Sigma : \widetilde{h}^n(X) \cong \widetilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$$
- ADDITIVITÀ Se X è il wedge di un insieme di CW complessi puntati X_i, allora l'inclusione $X_i \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo
$$\widetilde{h}^\bullet(X) \xrightarrow{\cong} \prod_i \widetilde{h}^\bullet(X_i)$$

Ogni teoria coomologica così costruita determina una famiglia di spazi topologici con una speciale struttura che li collega, che costituisce un cosidetto *spettro*[6].

Definizione 3.30. Uno spettro è una successione di spazi puntati X_i, $i \in \mathbb{N}$, e mappe puntate $\Sigma X_i \to X_{i+1}$.

Possiamo definire per esempio lo spettro di Eilenberg-MacLane $\{K(G,n)\}_n$ costruito a partire dagli spazi di Eilenberg-MacLane.
Dall'aggiunzione $\Sigma \dashv \Omega$ sorge la seguente definizione:

Definizione 3.31. Un Ω-spettro è una successione di spazi puntati X_i ed equivalenze deboli $X_i \to \Omega X_{i+1}$.

Di solito si richiede che gli X_i abbiano il tipo di omotopia di un CW complesso, nel qual caso sappiamo che la nozione di equivalenza debole ed equivalenza omotopica coincidono. Inoltre, in questo caso, vale il risultato seguente.

Teorema 3.32. Sia $\{X_i\}_i$ un Ω-spettro. Definiamo
$$\widetilde{h}^n(Y) = \begin{cases} [Y, X_k]_* & \text{se } k \geq 0 \\ [Y, \Omega^{-k} X_0]_* & \text{se } k < 0 \end{cases}$$
Allora i funtori $\widetilde{h}^n$ definiscono una teoria coomologica ridotta sui CW complessi puntati.

[6] Qui ci riferiamo a quello che May chiama *prespettro* in [JPM99]

Dimostrazione. Si veda il Teorema a pag.178 di [JPM99]. □

Pertanto, il teorema di Brown assume una forma più generale.

Teorema 3.33. Ogni teoria coomologica ridotta sulla categoria dei CW complessi puntati e mappe che preservano il punto base è della forma

$$\widetilde{h}^n(X) = [X, K_n]_*$$

per qualche Ω-spettro $\{K_n\}$.

Anche in questo caso si vede che i K_n sono unici a meno di equivalenza omotopica.

Questa riformulazione ha il doppio vantaggio di generalizzare i risultati visti nei paragrafi precedenti, primo fra tutti l'esistenza degli spazi di Eilenberg-MacLane, e di offrire un ponte fra le due versioni del teorema di rappresentabilità di Brown viste nel corso di questa tesi. Infatti, sebbene ci siano diverse categorie di spettri, tutte loro determinano la stessa categoria dell'omotopia, nota col nome di *categoria dell'omotopia stabile* e quest'ultima si può dotare della struttura di categoria triangolata.

Bibliografia

[AGP02] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, Carlos Prieto, *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*, 2002

[Al09] Paolo Aluffi, *Algebra: Chapter 0*, 2009

[GM96] Sergei I.Gelfand, Jurij Manin, *Methods of Homological Algebra*, 1996

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, 2006

[ML71] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 1971

[JPM99] J. Peter May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, 1999

[Mur06] Daniel Murfet, *Triangulated Categories* (lecture notes), 2006

[Nee99] Amnon Neeman, *Triangulated Categories*, 1999

[Rot88] Joseph Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, 1988

Sitografia

[MSE.01] Mathematics Stack Exchange, *Equivalent conditions for a preabelian category to be abelian?*
http://math.stackexchange.com/questions/45008/equivalent-conditions-for-a-preabelian-category-to-be-abelian?rq=1

[MSE.02] Mathematics Stack Exchange, *Converse to: Equivalent conditions for a preabelian category to be abelian?*
http://math.stackexchange.com/questions/1682294/converse-to-equivalent-conditions-for-a-preabelian-category-to-be-abelian?noredirect=1&lq=1

[MO.01] MathOverflow, *How do i know the derived category is not abelian?*
http://mathoverflow.net/questions/15658/how-do-i-know-the-derived-category-is-not-abelian

[MO.02] MathOverflow, *Splitting in triangulated categories*
http://mathoverflow.net/questions/4782/splitting-in-triangulated-categories

[AM.01] Akhil Mathew, *Eilenberg-MacLane spaces* (blog post)
https://amathew.wordpress.com/2010/12/06/eilenberg-maclane-spaces/