Il Teorema di Brown
per categorie triangolate

Relatore
Prof.ssa Margherita Barile

Laureando
Nicola Di Vittorio

Università di Bari

13 Luglio 2017

Un teorema, molte versioni

Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione "intermedia" nel contesto delle categorie triangolate.

Un teorema, molte versioni

Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione “intermedia” nel contesto delle categorie triangolate.

Obiettivo

Dare condizioni sufficienti affinché un certo funtore definito su una *categoria triangolata* a valori in una *abeliana* sia *rappresentabile*.

Un teorema, molte versioni

Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione “intermedia” nel contesto delle categorie triangolate.

Obiettivo

Dare condizioni sufficienti affinché un certo funtore definito su una *categoria triangolata* a valori in una *abeliana* sia *rappresentabile*.

Definizione (funtore rappresentabile)

Sia $\mathbf{C}$ una categoria localmente piccola. Diciamo che un funtore $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ è *rappresentabile* se esiste un oggetto X di $\mathbf{C}$ e un isomorfismo naturale $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \to F$.

Categorie additive

Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

Categorie additive

Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ha struttura di gruppo abeliano e la mappa $(g, f) \mapsto g \circ f$ che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.

Categorie additive

Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ha struttura di gruppo abeliano e la mappa $(g, f) \mapsto g \circ f$ che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

Categorie additive

Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ha struttura di gruppo abeliano e la mappa $(g, f) \mapsto g \circ f$ che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preadditiva.

Categorie additive

Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ha struttura di gruppo abeliano e la mappa $(g, f) \mapsto g \circ f$ che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preadditiva.

Definizione (funtore additivo)

Un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ fra due categorie preadditive si dice *additivo* se per ogni $A, B \in \mathbf{C}$ la funzione $f : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$ è un omomorfismo di gruppi.

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia **C** additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia $\mathbf{C}$ additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$
\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed] \\
& Q &
\end{tikzcd}
$$

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia $\mathbf{C}$ additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$
\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed] \\
& Q &
\end{tikzcd}
$$

Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia $\mathbf{C}$ additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\ \ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia **C** additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker} f \arrow[dl, dashed] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel
- ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

Categorie abeliane

Definizione (kernel e cokernel)

Sia $\mathbf{C}$ additiva e $f : X \to Y$ un suo morfismo. Il *kernel* di f, se esiste, è il pullback di $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$. Il *cokernel* di f, se esiste, è il kernel di f in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

$$
\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed] \\
& Q &
\end{tikzcd}
$$

Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel
- ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preabeliana.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in \mathbf{C}$. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- **Grp** non è preadditiva, infatti $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ NON sono isomorfi.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- **Grp** non è preadditiva, infatti $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- **Grp** non è preadditiva, infatti $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.
- R-**Mod** (e quindi **Ab**) è una categoria abeliana.

Proprietà

Sia **C** preadditiva e $X, Y \in$ **C**. Se $X \times Y$ esiste in **C** allora esiste anche $X \sqcup Y$ (notazione alternativa: $X \oplus Y$) e questi sono isomorfi.

Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- **Grp** non è preadditiva, infatti $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.
- *R*-**Mod** (e quindi **Ab**) è una categoria abeliana.

Definizione

Dato f morfismo di una categoria abeliana, si definiscono $\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker} f)$ e $\mathrm{coim} f = \mathrm{coker}(\ker f)$, dette immagine e coimmagine di f.

Categorie con traslazione

Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria $\mathbf{D}$ e di una auto-equivalenza (shift) $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$. Si richiede che i funtori $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che $F \circ T \cong T' \circ F$.

Categorie con traslazione

Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria $\mathbf{D}$ e di una auto-equivalenza (shift) $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$. Si richiede che i funtori $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che $F \circ T \cong T' \circ F$.

Definizione (triangolo)

Sia $\mathbf{D}$ additiva. Un *triangolo* è una successione $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$.

Categorie con traslazione

Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria **D** e di una auto-equivalenza (shift) $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$. Si richiede che i funtori $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che $F \circ T \cong T' \circ F$.

Definizione (triangolo)

Sia **D** additiva. Un *triangolo* è una successione $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$.

Definizione (morfismo di triangoli)

Un morfismo di triangoli è un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Categorie triangolate

Definizione

Una *categoria triangolata* **T** è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

Categorie triangolate

Definizione

Una *categoria triangolata* **T** è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

Categorie triangolate

Definizione

Una *categoria triangolata* **T** è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

TR1

Il triangolo $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ è un d.t.

Categorie triangolate

Definizione

Una *categoria triangolata* **T** è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

TR1

Il triangolo $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ è un d.t.

TR2

Per ogni $f : X \longrightarrow Y$ esiste un d.t. $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$.

TR3

Se un triangolo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ è distinto allora anche $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ e $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$ sono distinti.

TR3

Se un triangolo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ è distinto allora anche $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ e $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$ sono distinti.

TR4

Dati due d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$ e due morfismi $\alpha : X \to X'$ e $\beta : Y \to Y'$ con $f' \circ \alpha = \beta \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

TR3

Se un triangolo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ è distinto allora anche $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ e $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$ sono distinti.

TR4

Dati due d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$ e due morfismi $\alpha : X \to X'$ e $\beta : Y \to Y'$ con $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, esiste un morfismo $\gamma : Z \to Z'$ che dà luogo ad un morfismo di triangoli distinti:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

TR3

Se un triangolo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ è distinto allora anche $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ e $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$ sono distinti.

TR4

Dati due d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$ e due morfismi $\alpha : X \to X'$ e $\beta : Y \to Y'$ con $f' \circ \alpha = \beta \circ f$, esiste un morfismo $\gamma : Z \to Z'$ che dà luogo ad un morfismo di triangoli distinti:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

TR5

Dati tre d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$, $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$ e $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$, esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' & Y' & X' & TZ'
\end{tikzcd}
$$

TR5

Dati tre d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$, $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$ e $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$, esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' & X' & TZ'
\end{tikzcd}
$$

TR5

Dati tre d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$, $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$ e $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$, esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' & TZ'
\end{tikzcd}$$

TR5

Dati tre d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$, $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$ e $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$, esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' & TZ'
\end{tikzcd}
$$

TR5

Dati tre d.t. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$, $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$ e $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$, esiste un d.t. $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$ che fa commutare il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & TX \arrow[d, "id"'] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & TX \arrow[d, "T(f)"'] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & TY \arrow[d, "T(h)"'] \\
Z' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v"] & X' \arrow[r, "w"] & TZ'
\end{tikzcd}
$$

Definizione

Un funtore triangolato $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

Definizione

Un funtore triangolato $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene $K(A)$

Definizione

Un funtore triangolato $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$, in topologia algebrica

Definizione

Un funtore triangolato $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$, in topologia algebrica
- Varie categorie di fasci associate a una varietà o a uno schema, in geometria algebrica

Definizione

Un funtore triangolato $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$, in topologia algebrica
- Varie categorie di fasci associate a una varietà o a uno schema, in geometria algebrica

Definizione

Si dice che una categoria triangolata $\mathbf{T}$ ammette somme dirette piccole se ogni insieme $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$ ha somma diretta (coprodotto) in $\mathbf{T}$.

Funtori coomologici

Definizione

Una successione di morfismi $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ in una categoria abeliana è detta *esatta* (in X) se:

1. $g \circ f = 0$
2. $\mathrm{im} f \cong \ker g$

Funtori coomologici

Definizione

Una successione di morfismi $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ in una categoria abeliana è detta *esatta* (in X) se:

1. $g \circ f = 0$
2. $\operatorname{im} f \cong \ker g$

Definizione

Siano $\mathbf{T}$ triangolata e $\mathbf{A}$ abeliana. Un funtore additivo $F : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ si dice *coomologico* se per ogni triangolo distinto $X \to Y \to Z \to TX$ in $\mathbf{T}$ si ha che la successione $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ di morfismi di $\mathbf{A}$ è esatta.

Funtori coomologici

Definizione

Una successione di morfismi $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ in una categoria abeliana è detta *esatta* (in X) se:

1. $g \circ f = 0$
2. $\operatorname{im} f \cong \ker g$

Definizione

Siano $\mathbf{T}$ triangolata e $\mathbf{A}$ abeliana. Un funtore additivo $F : \mathbf{T} \to \mathbf{A}$ si dice *coomologico* se per ogni triangolo distinto $X \to Y \to Z \to TX$ in $\mathbf{T}$ si ha che la successione $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ di morfismi di $\mathbf{A}$ è esatta.

Proposizione

Per ogni $A \in \mathbf{T}$, i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(A, -)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(-, A)$ sono coomologici.

Categorie triangolate perfettamente generate

Definizione

Una categoria triangolata $\mathbf{T}$ è detta *perfettamente generata* se esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$, non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

Categorie triangolate perfettamente generate

Definizione

Una categoria triangolata $\mathbf{T}$ è detta *perfettamente generata* se esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$, non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

- Per ogni $X \in \mathbf{T}$ t.c. $\mathrm{Hom}(C, X) \cong 0 \ \ \forall C \in \mathcal{F}$, si ha che $X \cong 0$

Categorie triangolate perfettamente generate

Definizione

Una categoria triangolata $\mathbf{T}$ è detta *perfettamente generata* se esiste $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{T})$, non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

- Per ogni $X \in \mathbf{T}$ t.c. $\mathrm{Hom}(C, X) \cong 0 \ \ \forall C \in \mathcal{F}$, si ha che $X \cong 0$
- Per ogni famiglia numerabile $\{X_i \to Y_i\}_{i \in I}$ di morfismi in $\mathbf{T}$ tale che la mappa $\mathrm{Hom}(C, X_i) \to \mathrm{Hom}(C, Y_i)$ si annulla per ogni $i \in I$ e ogni $C \in \mathcal{F}$, la mappa indotta

$$\mathrm{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} X_i\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} Y_i\right)$$

si annulla per ogni $C \in \mathcal{F}$.

Il teorema di rappresentabilità di Brown

Teorema

Sia **T** una categoria triangolata perfettamente generata che ammette somme dirette piccole. Sia $H : \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ un funtore coomologico per cui valga l'isomorfismo $H\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} H(X_i)$ per ogni insieme $\{X_i\}_{i \in I}$ di oggetti di **T**. Allora H è rappresentabile.

Il teorema di rappresentabilità di Brown

Teorema

Sia **T** una categoria triangolata perfettamente generata che ammette somme dirette piccole. Sia $H : \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ un funtore coomologico per cui valga l'isomorfismo $H\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} H(X_i)$ per ogni insieme $\{X_i\}_{i \in I}$ di oggetti di **T**. Allora H è rappresentabile.

Corollario

Se **T** soddisfa le ipotesi del teorema si ha che:

1. **T** ammette prodotti piccoli
2. Se $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è un funtore triangolato che commuta con le somme dirette piccole, allora F ha un aggiunto destro