

# Il Teorema di Brown per categorie triangolate

Relatore

Prof.ssa Margherita Barile

Laureando

Nicola Di Vittorio

Università di Bari

13 Luglio 2017

## Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione “intermedia” nel contesto delle categorie triangolate.

# Un teorema, molte versioni

## Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione “intermedia” nel contesto delle categorie triangolate.

## Obiettivo

Dare condizioni sufficienti affinché un certo funtore definito su una *categoria triangolata* a valori in una *abeliana* sia *rappresentabile*.

# Un teorema, molte versioni

## Premessa

Il *teorema di rappresentabilità di Brown* è presente in letteratura con vari gradi di generalità. In questa sede ci si occuperà della sua formulazione “intermedia” nel contesto delle categorie triangolate.

## Obiettivo

Dare condizioni sufficienti affinché un certo funtore definito su una *categoria triangolata* a valori in una *abeliana* sia *rappresentabile*.

## Definizione (funtore rappresentabile)

Sia **C** una categoria localmente piccola. Diciamo che un funtore  $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  è *rappresentabile* se esiste un oggetto  $X$  di **C** e un isomorfismo naturale  $\phi : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \rightarrow F$ .

# Categorie additive

## Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

# Categorie additive

## Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni  $X, Y \in \mathbf{C}$ , l'insieme  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  ha struttura di gruppo abeliano e la mappa  $(g, f) \mapsto g \circ f$  che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.

# Categorie additive

## Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni  $X, Y \in \mathbf{C}$ , l'insieme  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  ha struttura di gruppo abeliano e la mappa  $(g, f) \mapsto g \circ f$  che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

# Categorie additive

## Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni  $X, Y \in \mathbf{C}$ , l'insieme  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  ha struttura di gruppo abeliano e la mappa  $(g, f) \mapsto g \circ f$  che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preadditiva.

# Categorie additive

## Definizione

Una categoria si dice *additiva* se

- per ogni  $X, Y \in \mathbf{C}$ , l'insieme  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  ha struttura di gruppo abeliano e la mappa  $(g, f) \mapsto g \circ f$  che manda una coppia di morfismi componibili nella loro composizione è bilineare.
- ha un oggetto zero e ogni coppia di oggetti ha un prodotto.

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preadditiva.

## Definizione (funtore additivo)

Un funtore  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  fra due categorie preadditive si dice *additivo* se per ogni  $A, B \in \mathbf{C}$  la funzione  $f : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$  è un omomorfismo di gruppi.

# Categorie abeliane

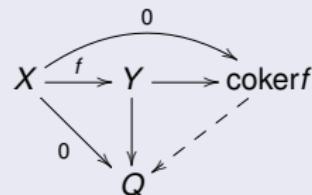
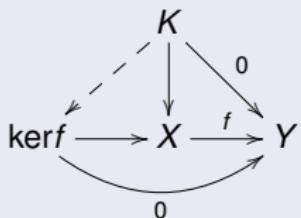
## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .

# Categorie abeliane

## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .



# Categorie abeliane

## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & \ker f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} Y \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow \text{coker } f \\ & \searrow & & \downarrow & \swarrow \\ & 0 & & Q & \end{array}$$

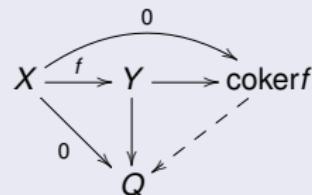
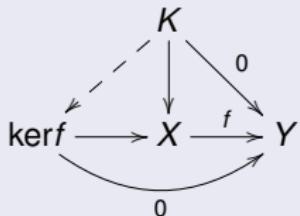
## Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

# Categorie abeliane

## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .



## Definizione

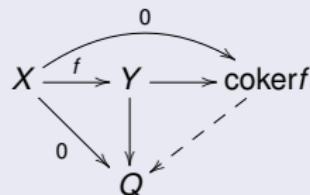
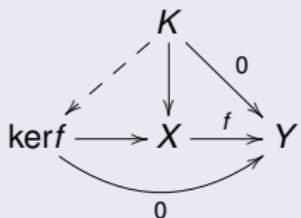
Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel

# Categorie abeliane

## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .



## Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel
- ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

# Categorie abeliane

## Definizione (kernel e cokernel)

Sia  $\mathbf{C}$  additiva e  $f : X \rightarrow Y$  un suo morfismo. Il *kernel* di  $f$ , se esiste, è il pullback di  $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow 0$ . Il *cokernel* di  $f$ , se esiste, è il kernel di  $f$  in  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \ker f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \curvearrowright & & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{coker } f \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & 0 & & Q \\ & & \curvearrowright & & \end{array}$$

## Definizione

Una categoria additiva si dice *abeliana* se

- ogni morfismo ha sia un kernel che un cokernel
- ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

Se vale solo il primo punto la categoria si dice preabeliana.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- Grp** non è preadditiva, infatti  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  NON sono isomorfi.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- Grp** non è preadditiva, infatti  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- **Grp** non è preadditiva, infatti  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.
- **R-Mod** (e quindi **Ab**) è una categoria abeliana.

## Proprietà

Sia  $\mathbf{C}$  preadditiva e  $X, Y \in \mathbf{C}$ . Se  $X \times Y$  esiste in  $\mathbf{C}$  allora esiste anche  $X \sqcup Y$  (notazione alternativa:  $X \oplus Y$ ) e questi sono isomorfi.

## Osservazioni ed esempi

- Le categorie additive hanno biprodotti *finiti* ma in generale prodotti e coprodotti infiniti non sono isomorfi.
- Grp** non è preadditiva, infatti  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  NON sono isomorfi.
- I moduli liberi formano una categoria additiva ma non preabeliana.
- R-Mod** (e quindi **Ab**) è una categoria abeliana.

## Definizione

Dato  $f$  morfismo di una categoria abeliana, si definiscono  $\text{im}f = \ker(\text{coker}f)$  e  $\text{coim}f = \text{coker}(\ker f)$ , dette immagine e coimmagine di  $f$ .

# Categorie con traslazione

## Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria  $\mathbf{D}$  e di una auto-equivalenza (shift)  $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$ . Si richiede che i funtori  $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$  tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che  $F \circ T \cong T' \circ F$ .

# Categorie con traslazione

## Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria  $\mathbf{D}$  e di una auto-equivalenza (shift)  $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$ . Si richiede che i funtori  $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$  tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che  $F \circ T \cong T' \circ F$ .

## Definizione (triangolo)

Sia  $\mathbf{D}$  additiva. Un *triangolo* è una successione  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ .

# Categorie con traslazione

## Definizione

Una categoria con traslazione è il dato di una categoria  $\mathbf{D}$  e di una auto-equivalenza (shift)  $T : \mathbf{D} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$ . Si richiede che i funtori  $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$  tra di esse commutino con lo shift, cioè siano tali che  $F \circ T \cong T' \circ F$ .

## Definizione (triangolo)

Sia  $\mathbf{D}$  additiva. Un *triangolo* è una successione  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ .

## Definizione (morfismo di triangoli)

Un morfismo di triangoli è un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & T(\alpha) \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

# Categorie triangolate

## Definizione

Una *categoria triangolata*  $\mathbf{T}$  è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

# Categorie triangolate

## Definizione

Una *categoria triangolata*  $\mathbf{T}$  è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

## TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

# Categorie triangolate

## Definizione

Una *categoria triangolata*  $\mathbf{T}$  è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

### TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

### TR1

Il triangolo  $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$  è un d.t.

# Categorie triangolate

## Definizione

Una *categoria triangolata*  $\mathbf{T}$  è una categoria additiva con traslazione munita di una famiglia di triangoli, detti *triangoli distinti* (d.t. per brevità) che soddisfa una serie di assiomi.

### TR0

Un triangolo isomorfo ad un d.t. è un d.t.

### TR1

Il triangolo  $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$  è un d.t.

### TR2

Per ogni  $f : X \longrightarrow Y$  esiste un d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ .

**TR3**

Se un triangolo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  è distinto allora anche  $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$  e  $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$  sono distinti.

**TR3**

Se un triangolo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  è distinto allora anche  $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$  e  $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$  sono distinti.

**TR4**

Dati due d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  e  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$  e due morfismi  $\alpha : X \rightarrow X'$  e  $\beta : Y \rightarrow Y'$  con  $f' \circ \alpha = \beta \circ f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

**TR3**

Se un triangolo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  è distinto allora anche  $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$  e  $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$  sono distinti.

**TR4**

Dati due d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  e  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$  e due morfismi  $\alpha : X \rightarrow X'$  e  $\beta : Y \rightarrow Y'$  con  $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ , esiste un morfismo  $\gamma : Z \rightarrow Z'$  che dà luogo ad un morfismo di triangoli distinti:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & & T(\alpha) \downarrow & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

**TR3**

Se un triangolo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  è distinto allora anche  $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$  e  $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z$  sono distinti.

**TR4**

Dati due d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$  e  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} TX'$  e due morfismi  $\alpha : X \rightarrow X'$  e  $\beta : Y \rightarrow Y'$  con  $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ , esiste un morfismo  $\gamma : Z \rightarrow Z'$  che dà luogo ad un morfismo di triangoli distinti:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & T(\alpha) \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

**TR5**

Dati tre d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY$  e  $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX$ , esiste un d.t.  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow TX \\
 id \downarrow & & & g \downarrow & & & id \downarrow \\
 & X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow TX \\
 f \downarrow & & id \downarrow & & & & T(f) \downarrow \\
 & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow TY \\
 h \downarrow & & l \downarrow & & & & T(h) \downarrow \\
 & Z' & & Y' & & X' & \longrightarrow TZ'
 \end{array}$$

**TR5**

Dati tre d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY$  e  $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX$ , esiste un d.t.  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow TX \\
 id \downarrow & & g \downarrow & & u \downarrow & & id \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 f \downarrow & & id \downarrow & & & T(f) \downarrow & \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & TY \\
 h \downarrow & & l \downarrow & & & T(h) \downarrow & \\
 Z' & \xrightarrow{u} & Y' & & X' & & TZ'
 \end{array}$$

## TR5

Dati tre d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY$  e  $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX$ , esiste un d.t.  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow TX \\
 id \downarrow & & g \downarrow & & u \downarrow & & id \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 f \downarrow & & id \downarrow & & v \downarrow & & T(f) \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & TY \\
 h \downarrow & & l \downarrow & & & & T(h) \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & & TZ'
 \end{array}$$

## TR5

Dati tre d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY$  e  $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX$ , esiste un d.t.  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow TX \\
 id \downarrow & & g \downarrow & & u \downarrow & & id \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 f \downarrow & & id \downarrow & & v \downarrow & & T(f) \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & TY \\
 h \downarrow & & l \downarrow & & id \downarrow & & T(h) \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & & TZ'
 \end{array}$$

## TR5

Dati tre d.t.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \rightarrow TX$ ,  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \rightarrow TY$  e  $X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \rightarrow TX$ , esiste un d.t.  $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$  che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Z' & \longrightarrow TX \\
 id \downarrow & & g \downarrow & & u \downarrow & & id \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{l} & Y' & \longrightarrow & TX \\
 f \downarrow & & id \downarrow & & v \downarrow & & T(f) \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & TY \\
 h \downarrow & & l \downarrow & & id \downarrow & & T(h) \downarrow \\
 Z' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & X' & \xrightarrow{w} & TZ'
 \end{array}$$

## Definizione

Un funtore triangolato  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

## Definizione

Un funtore triangolato  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

## Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene  $K(A)$

## Definizione

Un funtore triangolato  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

## Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene  $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$ , in topologia algebrica

## Definizione

Un funtore triangolato  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

## Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene  $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$ , in topologia algebrica
- Varie categorie di fasci associate a una varietà o a uno schema, in geometria algebrica

## Definizione

Un funtore triangolato  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore che commuta con lo shift e manda d.t. in d.t.

## Esempi di categorie triangolate

- La categoria dell'omotopia dei complessi di catene  $K(A)$
- La categoria dell'omotopia stabile  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$ , in topologia algebrica
- Varie categorie di fasci associate a una varietà o a uno schema, in geometria algebrica

## Definizione

Si dice che una categoria triangolata  $\mathbf{T}$  ammette somme dirette piccole se ogni insieme  $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Ob}(\mathbf{T})$  ha somma diretta (coprodotto) in  $\mathbf{T}$ .

# Funtori coomologici

## Definizione

Una successione di morfismi  $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$  in una categoria abeliana è detta *esatta* (in  $X$ ) se:

- ①  $g \circ f = 0$
- ②  $\text{im } f \cong \ker g$

# Funtori coomologici

## Definizione

Una successione di morfismi  $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$  in una categoria abeliana è detta *esatta* (in  $X$ ) se:

- ①  $g \circ f = 0$
- ②  $\text{im } f \cong \ker g$

## Definizione

Siano  $\mathbf{T}$  triangolata e  $\mathbf{A}$  abeliana. Un funtore additivo  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$  si dice *coomologico* se per ogni triangolo distinto  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX$  in  $\mathbf{T}$  si ha che la successione  $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$  di morfismi di  $\mathbf{A}$  è esatta.

# Funtori coomologici

## Definizione

Una successione di morfismi  $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$  in una categoria abeliana è detta *esatta* (in  $X$ ) se:

- ①  $g \circ f = 0$
- ②  $\text{im } f \cong \ker g$

## Definizione

Siano  $\mathbf{T}$  triangolata e  $\mathbf{A}$  abeliana. Un funtore additivo  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{A}$  si dice *coomologico* se per ogni triangolo distinto  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX$  in  $\mathbf{T}$  si ha che la successione  $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$  di morfismi di  $\mathbf{A}$  è esatta.

## Proposizione

Per ogni  $A \in \mathbf{T}$ , i funtori  $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(A, -)$  e  $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(-, A)$  sono coomologici.

# Categorie triangolate perfettamente generate

## Definizione

Una categoria triangolata  $\mathbf{T}$  è detta *perfettamente generata* se esiste  $\mathcal{F} \subseteq \text{Ob}(\mathbf{T})$ , non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

# Categorie triangolate perfettamente generate

## Definizione

Una categoria triangolata  $\mathbf{T}$  è detta *perfettamente generata* se esiste  $\mathcal{F} \subseteq \text{Ob}(\mathbf{T})$ , non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

- Per ogni  $X \in \mathbf{T}$  t.c.  $\text{Hom}(C, X) \cong 0 \ \forall C \in \mathcal{F}$ , si ha che  $X \cong 0$

# Categorie triangolate perfettamente generate

## Definizione

Una categoria triangolata  $\mathbf{T}$  è detta *perfettamente generata* se esiste  $\mathcal{F} \subseteq \text{Ob}(\mathbf{T})$ , non vuoto, che soddisfa le seguenti condizioni:

- Per ogni  $X \in \mathbf{T}$  t.c.  $\text{Hom}(C, X) \cong 0 \ \forall C \in \mathcal{F}$ , si ha che  $X \cong 0$
- Per ogni famiglia numerabile  $\{X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  di morfismi in  $\mathbf{T}$  tale che la mappa  $\text{Hom}(C, X_i) \rightarrow \text{Hom}(C, Y_i)$  si annulla per ogni  $i \in I$  e ogni  $C \in \mathcal{F}$ , la mappa indotta

$$\text{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} X_i\right) \longrightarrow \text{Hom}\left(C, \bigoplus_{i \in I} Y_i\right)$$

si annulla per ogni  $C \in \mathcal{F}$ .

# Il teorema di rappresentabilità di Brown

## Teorema

Sia  $\mathbf{T}$  una categoria triangolata perfettamente generata che ammette somme dirette piccole. Sia  $H : \mathbf{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un funtore coomologico per cui valga l'isomorfismo  $H\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} H(X_i)$  per ogni insieme  $\{X_i\}_{i \in I}$  di oggetti di  $\mathbf{T}$ . Allora  $H$  è rappresentabile.

# Il teorema di rappresentabilità di Brown

## Teorema

Sia  $\mathbf{T}$  una categoria triangolata perfettamente generata che ammette somme dirette piccole. Sia  $H : \mathbf{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un funtore coomologico per cui valga l'isomorfismo  $H\left(\bigoplus_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} H(X_i)$  per ogni insieme  $\{X_i\}_{i \in I}$  di oggetti di  $\mathbf{T}$ . Allora  $H$  è rappresentabile.

## Corollario

Se  $\mathbf{T}$  soddisfa le ipotesi del teorema si ha che:

- ①  $\mathbf{T}$  ammette prodotti piccoli
- ② Se  $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  è un funtore triangolato che commuta con le somme dirette piccole, allora  $F$  ha un aggiunto destro